



David Corneillie : MP 2022-2023
DS n°1 : Mathématiques 4 heures
Samedi 10/09/22

Ce devoir se compose de 5 exercices indépendants les uns des autres
L'usage de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

Exercice 1 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^x \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 1$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, l'équation $f(x, y) = 1$
2. Etudier la continuité de f .
3. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x, 0)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?
4. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^*$. En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$
5. Déterminer les points critiques de f
6. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x, y) \geq g(x)$, en déduire que f admet un minimum local en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$
7. La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(\frac{-1}{e}, 0\right)$?
8. La fonction f admet-elle d'autres extrema locaux

Exercice 2 :

On rappelle le résultat suivant : tout réel x est la limite d'une suite de rationnels (q_n)

Préliminaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.

On considère les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2 (f(y))^2$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle
3. Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
4. On se place donc, maintenant dans le cas où $f(0) \neq 0$. Pour tout entier naturel n , montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = (f(x))^{n^2}$.

5. On notera alors $a = f(1)$, exprimer $f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, puis $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ et enfin $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

1. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
2. Soit la série de terme général $w_n = \frac{1}{3^n} \sum_{p=0}^n \frac{6^p}{(p)!}$. Justifier que cette série converge et préciser sa somme

Exercice 4 :

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$

On considère le plan (P) d'équation $x + y + z = 0$ et la droite (D) d'équations $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

1. Déterminer une base respective de (P) puis de (D) .
2. Montrer que $E = (P) \oplus (D)$

On considère f la projection sur (P) parallèlement à (D) . On note $u = (x, y, z) \in E$, et $f(u)$ son image.

3. A quel sous espace vectoriel appartient $f(u) - u$? (justifier votre réponse)
4. En déduire en fonction de (x, y, z) les coordonnées dans E de $f(u)$
5. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de E .

Exercice 5 :

On considère un entier $n \geq 2$ et n complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$

On définit le déterminant de Vandermonde par $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

1. Que vaut ce déterminant lorsque les $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts ?

On suppose maintenant que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont 2 à 2 distincts

On pose la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$

2. Montrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$. Préciser le coefficient en t^{n-1}
3. Montrer alors que $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$
4. On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} = i^j$. Calculer son déterminant.