David Corneillie : MP 2023-2024
DS n°1 : Mathématiques 4 heures Vendredi 08/09/23

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Des connaissances fondamentales :

1. *Donner un développement limité en 0 à l'ordre 4 de* $x \mapsto ln(1+x)$
2. *Calculer le déterminant de la matrice* $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
3. *Effectuer la décomposition en éléments simples de* $A(x) = \frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$ *dans* $\mathbb{R}[X]$
4. *Soit n un entier non nul. Que vaut* $\sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q)^2}$ *?*
5. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ *(on pourra dans un premier temps prendre* $x \in [0,1]$ *puis on généralisera à tout réel x)*
6. *Soit n un entier non nul. On note* S_n *l'ensemble des permutations de* $[\![1,n]\!]$*. Que vaut le cardinal de* S_n *?*
7. *Soient a un réel et* $b \in]-1,1[$*. Exprimer* e^a *et* $\frac{1}{1-b}$ *comme une somme de série. Puis déterminer une suite* (u_n) *telle que* $\frac{e^a}{1-b} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *.*
8. *Calculer* $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$
9. *Résoudre sur* $]0,+\infty[$ *le système suivant* $\begin{cases} 2xy'(x) + y(x) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$
10. *Que peut-on dire d'une fonction continue sur un segment ? (2 réponses différentes)*
11. *Donner les racines* $n^{ième}$ *de* -1

Des démonstrations à effectuer :

1. *Montrer que pour tout* $x \in]-1,1[,\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2. *Soit n un entier non nul. Montrer que la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ *est divergente*
3. *Soit E un espace vectoriel. Montrer que si p est un projecteur de E alors Imp et kerp sont supplémentaires dans E.*
4. *Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de la variable réelle.*

5. *Rappeler la définition d'une application linéaire f de E dans F. Que vaut l'image de 0 par f ? (justifier votre réponse)*

Exercice n°1 : (un peu de probabilité)

Une entreprise emploie 10 salariés : 3 ingénieurs, 2 secrétaires et 5 techniciens.
La direction désigne au hasard trois personnes pour participer à une commission.
X désigne le nombre de secrétaires présentes dans cette commission
Y le nombre d'ingénieurs.

1. *Quel est le nombre de commissions réalisables ?*
2. *Calculer* $P(X = 1, Y = 1)$
3. *Pour* $i \in [\![0,2]\!]$ *et* $j \in [\![0,3]\!]$ *, donner l'expression de* $P(X = i, Y = j)$
4. *En déduire* $P(X = 1)$

Exercice n°2 : (un peu de dénombrement)

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, on note* $S(n, p)$ *le nombre de surjections de* $[\![1, n]\!]$ *sur* $[\![1, p]\!]$

1. *Déterminer* $S(n, p)$ *si* $p > n$
2. *Calculer* $S(n, 1)$
3. *Combien d'applications de* $[\![1, n]\!]$ *sur* $\{1,2\}$ *ne sont pas surjectives ? En déduire* $S(n, 2)$
4. *Montrer que* $S(n, 3) = 3^n - 3 - 3S(n, 2)$*, en déduire* $S(n, 3)$
5. *On suppose* $p \leq n$.
   Exprimer $S(n, p)$ *en fonction de* $p, S(n-1, p)$ *et de* $S(n-1, p-1)$
6. *En déduire que si* $p \leq n$ *alors* $S(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$

Exercice n°3 : (un peu de géométrie)

Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*, on considère la droite D passant par le point A de coordonnées* $(-1,2,1)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{u} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

1. *Donner les équations de cette droite D*
2. *Déterminer l'équation du plan π passant par A et orthogonal à D*

Exercice n°4 : (un peu de Python)

Ecrire une fonction produit(A ,B) *prenant en argument deux matrices carrées A et B de même dimension et qui renvoie le produit AB*

Ce sera tout pour ce premier DS assez court