



David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°1 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 06/09/24

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Exercice n°1 :

Q1 : Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$

Q2 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. En déduire, en fonction de a et b , la valeur de $\int_0^1 \frac{ax+b}{1+x+x^2} dx$

Q3 : Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ en éléments simples, la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

Q4 : On pose $g(x) = f(x) - \frac{1}{3(x-1)}$. Calculer $\int_0^1 g(x) dx$

Exercice n°2

On considère une suite de réels (u_n) et pour tout entier n , on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum w_n$ converge
2. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$
3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \right) - n$. Pour tout $n \geq 1$, exprimer $w_n = u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
4. Etudier la nature de la suite (u_n)

Exercice n°3 : (extrait de centrale MP 2024)

Dans l'exercice K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C}

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K

Pour tout entier naturel d , on pose $K_d[X]$ les polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à d

On considère l'application $\Delta : K[X] \rightarrow K[X]$ telle que $P(X) \mapsto \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $K[X]$
2. Pour tout $P \in K[X]$, déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P
3. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on note alors Δ_d la restriction de Δ sur $K_d[X]$. Montrer que Δ_d est un endomorphisme de $K_d[X]$
4. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta_d)$ et $\operatorname{Im}(\Delta_d)$
5. En déduire $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$

On considère $h \in K[X]$.

On dit qu'une fonction f définie sur K est solution de (E_h) lorsque $\forall x \in K, f(x+1) - f(x) = h(x)$

6. Que peut-on dire de l'étude de l'équation (E_h) en utilisant les résultats de la question 5. ?
7. On pose $\forall x \in K, h(x) = x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $K_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de (E_h)

Exercice n°4 : (extrait de e3a 2024)

On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 , 4 réels 2 à 2 distincts

On définit 4 polynômes $(L_i)_{i=1,2,3,4}$ de degré 3 tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$ on ait $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$

Avec $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ (c'est le symbole de Kronecker)

On note $F = (L_1, L_2, L_3, L_4)$

1. Montrer que F forme une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer L_1 sous sa forme irréductible
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, exprimer les coordonnées de P dans $\text{Vect}(F)$

Exercice n°5 :

On pose $E = \mathbb{R}^2$, on note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sa base canonique

On définit l'endomorphisme f de E tel que $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - 4y \end{pmatrix}$

1. Ecrire la matrice f exprimée dans la base canonique de E
2. On pose $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que ces 2 vecteurs forme une base de E .
3. Ecrire la matrice de f exprimée dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Exercice n°6 :

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

1. On pose $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$. Déterminer la loi de S
2. On pose $T = (U - 1)(V - 1) + 1$. Déterminer la loi de T
3. Calculer $E(S(T - 1))$
4. En déduire la covariance de (S, T)
5. S et T sont-elles indépendantes ?

I can see you in the morning when you go to school
Don't forget your books, you know you've got to learn the golden rule
Your teacher tells you stop your playing, get on with your work
And be like Johnnie-Too-good, don't you know he never shirks
He's coming along
After school is over, you're playing in the park
Don't be out too late, don't let it get too dark
They tell you not to hang around and learn what life's about
And grow up just like them, won't you let it work it out
And you're full of doubt
Don't do this and don't do that
What are they trying to do?
(Make a good boy of you)
And do they know where it's at?
Don't criticize, they're old and wise
Do as they tell you to
Don't want the devil to
Come and put out your eyes
Maybe I'm mistaken expecting you to fight
Or maybe I'm just crazy, I don't know wrong from right
But while I'm still living, I've just got this to say
It's always up to you if you want to be that
Want to see that, want to see that way
You're coming along