David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°10 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 07/03/25

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Sujet n°1

Ce sujet comporte un unique problème

Partie I :

1. Montrer que la fonction $\gamma : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, *on pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \mathrm{d}t$

2. *Montrer que f est définie et continue sur* $[0,+\infty[$.
3. *Préciser la limite en* $+\infty$ *de* f.
4. *Montrer que f est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
5. *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de* f'.
6. *Montrer que f est de classe* C^2 *sur* $]0,+\infty[$.
7. *Exprimer* $f''(x)$ *sur* $]0,+\infty[$ *à l'aide de fonctions usuelles.*
8. *En déduire l'expression de* $f'(x)$ *pour* $x > 0$.
9. *Montrer que* $\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$ *et que* $f(0) = \frac{\pi}{2}$
10. *Montrer que* $\forall s \in \mathbb{R}, |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-cos(st)}{t^2} dt$

Partie II :

On pose pour tout entier naturel n non nul $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2} \mathrm{d}t$

11. *Justifier l'existence de* u_n *et préciser la monotonie de la suite* (u_{2n})
12. *Donner les valeurs de* u_1 *et* u_2
13. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ *où* $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} du$
14. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u]0,1], \left|1 - \left(cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leq u$
15. *Montrer que la suite* (v_n) *est convergente et donner sa limite sous forme d'une intégrale*
16. *En déduire que* $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$, *on pourra utiliser l'égalité* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$

Partie III :

17. *Soit X une variable aléatoire discrète, d'univers image fini* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ *et g une fonction de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Donner, sans le démontrer à l'aide de la formule de transfert l'espérance de* $g(X)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans* $\{-1,1\}$ *telles que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*, P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

18. *Déterminer l'univers image, l'espérance et la variance de* S_n
19. *Calculer* $P(S_2 = 0)$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, P(S_{2n+1} = 0)$.
20. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*, s \in S_{n+1}(\Omega)$, *montrer que* $P(S_{n+1} = s) = \frac{1}{2}\left(P(S_n = s-1) + P(S_n = s+1)\right)$
21. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(|S_{n+1}|) - E(|S_n|) = P(S_n = 0)$.
22. *Soient S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur un espace probabilisé* (Ω, A, P), *on suppose que T et –T ont la même loi.*
    Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$
23. *On considère la fonction* φ_n *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\phi_n(t) = E(cos(S_n t))$ *pour* $t \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \phi_n(t) = (cos\, t)^n$
    (on utilisera la formule de transfert avec $g : s \mapsto \cos(st)$ *)*
24. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$ *(on utilisera le résultat de la question 10.)*
25. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n+2}$

Sujet n°2

Ce sujet comporte un unique problème

On considère (Ω, T, P) un espace probabilisé

X sera une variable aléatoire discrète entière lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$

On fixe un réel $\alpha > 0$. Une variable aléatoire X est de dispersion d'ordre α lorsqu'elle vérifie la condition (D_α) : si n tend vers $+\infty$ alors $P(|X| \geq n) = \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Une variable aléatoire X est symétrique lorsque $X \text{ et } -X$ suivent la même loi, à savoir que $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = P(X = -x)$

On admettra le théorème de transfert d'égalité suivant :

> Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant le même univers image dans E et suivant la même loi, soit une application $u : E \to F$, alors $u(X) \text{ et } u(Y)$ suivent la même loi

<u>Préliminaires :</u>

1. *Soit X une variable aléatoire entière. Montrer que X est d'espérance finie si et seulement si* $|X|$ *est d'espérance finie.*
2. *Soit X une variable aléatoire entière. On dit que X est bornée s'il existe un réel* $M \geq 0$ *tel que* $P(|X| \leq M) = 1$. *Montrer que si X est bornée alors X est d'espérance finie.*
3. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *Montrer que si X est d'espérance finie alors* $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
4. *Soit X une variable aléatoire vérifiant la condition* (D_α). *Montrer que X et* X^2 *ne sont pas d'espérance finie.*
5. *Soient X une variable aléatoire symétrique et f une fonction impaire de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Montrer que* $f(X)$ *est symétrique et que si* $f(X)$ *admet une espérance, alors* $E(f(X)) = 0$
6. *Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que* $X+Y$ *est symétrique.*

<u>Partie 1 :</u>

On fixe un complexe z tel que $z \neq 1 \text{ et } |z| \leq 1$. On pose $L : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{z}{1-uz}\,\mathrm{d}u$

7. *Montrer que L est* C^∞ *sur* $[0,1]$ *et donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour* $n \geq 1$
8. *Justifier que* $\forall t \in]0,1],\ 1-t < |1-tz|$
9. *En déduire successivement que* $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
10. *En déduire que* $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

11. Soit la fonction $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t,u) \mapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$. *Montrer que* $\forall a \in]0,\pi[$ *il existe un réel* $m_a > 0$ *tel que* $\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1],\ |1+ue^{it}| \geq m_a$

12. On considère la fonction F définie sur $]-\pi,\pi[$ *par* $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}} \mathrm{d}u$. *Montrer que F est de classe* C^1 *sur* $]-\pi,\pi[$.

13. Montrer que $\forall t \in]-\pi,\pi[,\ F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$

14. En déduire l'expression de $F(t),\ \forall t \in]-\pi,\pi[$

15. Soit $\theta \in]0,2\pi[$, *déduire des questions précédentes que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Partie 2 :

On fixe une variable aléatoire symétrique X

On pose $\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto E(\cos(tX)) \end{cases}$ appelée fonction caractéristique de X

16. Montrer que $\Phi_X(t)$ *existe pour tout réel t.*

17. Montrer que Φ_X *est paire et que* $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$

18. Montrer que Φ_X *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Pour la suite, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition (D_α). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = P(|X| \geq n)$

19. On fixe $t \in]0,2\pi[$. *Montrer que* $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1})\cos(nt)$

20. En déduire que $\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right]$

21. Montrer que $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ *admet une limite lorsque* $t \to 0^+$. *On notera C cette limite*

22. En déduire que lorsque $t \to 0^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t)$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1)$

23. Conclure que lorsque $t \to 0^+$, $\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t)$. *Que peut-on en déduire pour la fonction* Φ_X *?*

Partie 3 :

On se donne dans cette partie une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières symétriques mutuellement indépendantes, suivant la même loi et vérifiant la condition (D_α).

On admettra que dans ces conditions $\forall n \geq 1$, la variable X_{n+1} est indépendante de $\sum_{k=1}^{n} X_k$

On pose alors $\forall n \geq 1,\ M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

24. *Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes.*
    Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$
25. *Montrer que* $\forall n \geq 1,\ M_n$ *est symétrique et que* $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$
26. *En déduire que* $\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$

Pour information, une théorie sur les séries de Fourier permettrait de montrer que :

$$P\left(a \leq M_n \leq b\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \left(\pi\alpha / 2\right)^2}$$

(ce qu'on appelle une convergence en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$)