David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°2 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 27/09/24

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Exercice n°1 : (extrait de INP)

On désigne par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients réels.

On se donne trois réels (a,b,c) avec $b \neq 0$ et on pose :

$$F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec F est une sous algèbre de $M_2(\mathbb{R})$, on la notera Γ. Montrer que (I,F) est une base de Γ*
2. *Justifier l'existence de deux suites (α_n) et (β_n) de réels, telles que pour tout entier naturel n on ait : $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$*
3. *Déterminer α_2 et β_2 en fonction de a,b et c .*
4. *Etablir une relation entre α_n, α_{n+1} et α_{n+2} .*
5. *Déterminer α_n et β_n si $a = 3, b = c = -2$*
6. *Lorsque $a = 3, b = c = -2$, déterminer les éléments inversibles de Γ . Γ est-il un corps ?*

Petit problème 1 : (extrait de centrale)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, D_n$ est l'ensemble des diviseurs de n

On écrit $\sum_{d/n} = \sum_{d \in D_n}$. Par exemple : $\sum_{d/6} d^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2$

Une fonction arithmétique est une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques sera noté A

On définit les fonctions : $\delta \in A$ par $\delta(1) = 1$ et $\delta(n) = 0$ si $n \neq 1$; $Id \in A$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, Id(n) = n$ et $enfin$ $1 \in A$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1(n) = 1$

Si f et g sont arithmétiques on définit $f * g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, (f * g)(n) = \sum_{d/n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

Partie 1 :

*1. Montrer que δ est neutre pour **

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 tel\ que\ n = d_1 d_2\}$

2. Justifier que pour tout entier n non nul, $(f * g)(n) = \sum_{(d_1,d_2) \in C_n} f(d_1) g(d_2)$

3. *En déduire que * est commutative*

4. *En utilisant* $\forall n \in \mathbb{N}^*, C'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3 \text{tel que } n = d_1 d_2 d_3\}$ *, montrer que * est associative.*

5. $(A,*)$ *est-il un groupe ?*

6. *Montrer que* $(A,+,*)$ *est un anneau.*

Partie 2 :

On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative lorsque

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}$$

On pose la fonction arithmétique μ *de Möbius définie par*

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(n) = (-1)^r \text{ si } n \text{ est produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ \mu(n) = 0 \quad \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Par exemple : $\begin{array}{l} \mu(30) = (-1)^3 = -1 \quad car \ \ 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ \mu(20) = 0 \ \ car \ \ 20 = 2^2 \times 5 \end{array}$

7. *Montrer que* μ *est multiplicative*

8. *Montrer que si f et g sont multiplicatives alors* $f * g$ *l'est aussi*

9. *Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si pour tout p premier et pour tout k entier naturel non nul,* $f(p^k) = g(p^k)$ *alors* $f = g$

10. *Montrer que* $\mu * 1 = \delta$

11. *Soit* $f \in A$*. On pose* $F \in A$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum_{d/n} f(d)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d/n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$.

12. *On rappelle que la fonction* ϕ *est l'indicatrice d'Euler, qu'elle est multiplicative et qu'elle est définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(n) = card(k \in [\![1,n]\!], k \wedge n = 1)$.

Montrer que $\phi = \mu * Id$.

Petit problème n°2 : (extrait de INP)

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n.*

1. *Soit* $f(x) = x^2 - x - 1$. *Calculer* $f(-x)f(x)$.
2. *Montrer que pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$*, il existe* $\widehat{P} \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{P}(x^2) = P(x)P(-x)$.
3. *On définit alors l'application* $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ *telle que* $\Phi(P) = \widehat{P}$. *On aura donc pour tout réel x,* $\Phi(P)(x^2) = P(x)P(-x)$. *Montrer que* $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$.
4. *Soient* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. *Exprimer* $\Phi(P)(x)$.

5. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ de coefficient dominant égal à 1, et admettant $(x_1, x_2, ..., x_n)$ comme racines telles que $|x_1| < |x_2| < .... < |x_n|$. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $P_k = (-1)^n \Phi(P_{k-1})$
   a. Quelles sont les racines de P_k ?
   b. On pose a_k le coefficient du terme de degré $n-1$ de P_k. Montrer que $\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{\frac{1}{2^k}} = |x_n|$.
6. Application : Soit $n = 2$ et $P_0(x) = x^2 - x - 1$. On pose $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$
   a. Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k.
   b. On considère la suite (u_k) définie par $u_1 = -3$ et $u_{k+1} = 2 - u_k^2$. Quelle est la limite de $|u_k|^{\frac{1}{2^k}}$?

If I had been God
I would have rearranged the veins
In the face to make them more resistant
To alcohol and less prone to aging
If I had been God
I would have sired many sons
And I would not have suffered
The Romans to kill even one of them
If I had been God
With my staff and my rod
If I had been given the nod
I believe I could have done a better job
And if I were a drone
Patrolling foreign skies
With my electronic eyes for guidance
And the element of surprise
I would be afraid
To find someone home
Maybe a woman at a stove
Baking bread, making rice
Or just boiling down some bones
If I were a drone
The temple's in ruins
The bankers get fat
The buffalo's gone
And the mountain top's flat
The trout in the streams are all hermaphrodites
You lean to the left, but you vote to the right
And it feels like déjà vu
The sun goes down and I'm still missing you
Counting the cost of love that got lost
And under my Gulf Stream, in circular pools
There's ninety-nine cents
Worth of drunkards and fools