David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°3 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 08/11/24

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Questions de connaissance :

1. *Combien y-a-t-il d'éléments inversibles dans* $\mathbb{Z}/128\mathbb{Z}$ *?*
2. *Soit A une matrice inversible, montrer qu'il existe une boule ouverte de centre A dans laquelle toutes les matrices sont inversibles*
3. *Donner la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe abélien multiplicatif*
4. *Déterminer l'expression de la suite* (u_n) *sachant que* $u_0 = u_1 = 1 \ et \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

Exercice :

On pose $E = \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E, \ p_1(x,y) = x \ \ et \ \ p_2(x,y) = y$

On considère F une partie fermée de E telle que $p_2(F)$ *soit bornée*

Montrer que $p_1(F)$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}$

Problème : Etude de matrices qui commutent

Soit un entier n supérieur à 2

On note $M_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels*

On désigne par $GL_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices inversibles de* $M_n(\mathbb{R})$

On admettra dans les parties 2 et 3 de ce problème le théorème de réduction simultanée suivant

> *Soient* $(A,B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ *telles que* $AB = BA$ *. On suppose que A et B sont diagonalisables, alors il existe une base commune de vecteurs propres de A et de B. Il existe donc* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP \ \ et \ \ P^{-1}BP$ *soient toutes les deux diagonales.*

Préliminaire :

On note $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \ telle \ que \ AB = BA\}$

Montrer que $(C(A), +, ., \times)$ *est une algèbre*

Partie 1 : Deux exemples simples

1. *Cas de la transposée. Montrer que* $A^TA = AA^T$ *si et seulement si il existe une matrice S symétrique et une matrice T antisymétrique telles que* $A = S + T \ \ et \ ST = TS$
2. *Cas d'une projection. Soit P une matrice de projection, montrer que* $AP = PA$ *si et seulement si l'image et le noyau de P sont stables par A*

Partie 2 :

3. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Montrer que A est diagonalisable.*
4. *On considère la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Justifier l'existence d'une matrice* $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP \ et \ P^{-1}BP$ *soient toutes les deux diagonales.*
5. *Déterminer une matrice P vérifiant la question4.*

Partie 3 :

6. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. *On pose une matrice* $M \in M_2(\mathbb{R})$ *telle que* $M^2 = A$. *Montrer que M est nécessairement diagonalisable.*
7. $Justifier\ l'existence\ de\ P \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP \ et \ P^{-1}MP$ *soient toutes les deux diagonales.*
8. $Montrer\ qu'il\ n'existe$ *que 4 matrices* $M \in M_2(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = A$. *Donner leur expression en fonction de P.*

Partie 4 : (démonstration du théorème de réduction simultanée)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

On considère u et v deux endomorphismes de E, diagonalisables qui commutent.

9. *Montrer que les sous espaces propres de u sont stables par v*
10. *On considère* $\lambda \in Sp(u)\ et\ w$ *la restriction de v à* $E_\lambda(u)$. *Montrer que w est diagonalisable*
11. *Démontrer le théorème de réduction simultanée*

Partie 5 : (cas où une matrice est nilpotente)

12. *Montrer qu'une matrice non nulle nilpotente n'est pas diagonalisable.*
13. *Soient* $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ *telles que* $AB = BA$ *et B nilpotente. On pose* $x \notin Sp(A)$ *et la matrice* $N = B(A - xI_n)^{-1}$, *montrer que N est nilpotente.*
14. *Montrer alors que A et* $A + B$ *ont le même polynôme caractéristique.*
15. *On pose F l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n qui commutent entre-elles. Montrer que F est un espace vectoriel.*
16. *Montrer que la dimension de F est inférieure à* $\frac{n(n-1)}{2}$.
17. *Quel est la structure topologique de F ?*

So, you think you're a Romeo
Playing a part in a picture show
Well, take the long way home
Take the long way home

'Cause you're the joke of the neighborhood
Why should you care if you're feelin' good?
Well, take the long way home
Take the long way home

There are times that you feel you're part of the scenery
All the greenery is comin' down, boy
And then your wife seems to think you're part of the furniture
Oh, it's peculiar, she used to be so nice

When lonely days turn to lonely nights
You take a trip to the city lights
And take the long way home
Take the long way home

You never see what you want to see
Forever playing to the gallery
You take the long way home
Take the long way home

When you're up on the stage, it's so unbelievable
Oh, unforgettable, how they adore you
But then your wife seems to think you're losing your sanity
Oh, calamity, is there no way out?

Does it feel that your life's become a catastrophe?
Oh, it has to be, for you to grow, boy
When you look through the years and see what you could have been
Oh, what you might have been
If you would have more time

So when the day comes to settle down
Who's to blame if you're not around?
You took the long way home