David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°4 : Mathématiques 4 heures : Mercredi 27/11/24

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Ce texte comporte deux sujets. Le premier est le sujet dit normal. Le second est plus difficile et s'adresse à ceux (celui) qui se sont portés volontaires et qui s'engagent à me rendre le sujet 1 en DNS pour lundi 02/12

Sujet n°1 :

Exercice n°1 :

On pose $u_n = n$ et $v_n = n - ln(n)$

1. *Montrer que les suites* (u_n) et (v_n) *sont équivalentes.*
2. *Les suites* (e^{u_n}) et (e^{v_n}) *sont-elles équivalentes ?*
3. *Montrer que les suites* (e^{a_n}) et (e^{b_n}) *sont équivalentes si et seulement si* $a_n - b_n = o(1)$
4. *On suppose que les suites* (a_n) et (b_n) *sont équivalentes, montrer que les suites* $\left((a_n)^{\frac{1}{n}}\right)$ *et* $\left((b_n)^{\frac{1}{n}}\right)$ *sont équivalentes.*

Exercice n°2 :

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ *sera noté* $M_n(\mathbb{R})$ *que l'on munit d'un produit scalaire* $\langle A, B\rangle = trace(A^T B)$ *et de sa norme associée* $\|A\| = \sqrt{trace(A^T A)}$

L'ensemble des matrices symétriques est noté $S_n(\mathbb{R})$

On définit $S_n^{++} = \{M \in S_n(\mathbb{R})\ \ telle\ \ que\ \ \forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0,\ X^T M X > 0\}$

On note enfin $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R})\ \ telle\ \ que\ M^T M = I_n\}$

1. *Montrer que* S_n^{++} *est une partie convexe de* $M_n(\mathbb{R})$
2. *Montrer que* $O_n(\mathbb{R})$ *est une partie compacte de* $M_n(\mathbb{R})$
3. *Si* $M \in O_n(\mathbb{R})$, *que vaut* $det(M)$ *?*
4. $O_n(\mathbb{R})$ *est-elle une partie connexe ?*

Problème :

Soit $I = [-a, a]$ *où* $a > 0$. *On considère E l'ensemble des fonctions de I dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *sur I*

Si $f \in E$, *on notera* $f^{(p)}$ *la dérivée d'ordre p de f*

On note $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels.*

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

Si $f \in E$ *, on pose* $u(f)$ *et* $v(f)$ *les applications de I dans* $\mathbb{R}$ *définies par :*

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin t)\,\mathrm{d}t \quad et \quad v(f)(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* $u(f)$ *et* $v(f)$ *sont bien définies lorsque* $f \in E$

On admettra que $u(f)$ *et* $v(f)$ *sont bien des éléments de E*

On admettra que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ *on a* $u(f)^{(p)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^p f^{(p)}(x\sin t)\,\mathrm{d}t$

2. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) = x^n$*. Exprimer* $u(f_n)$ *et* $v(f_n)$ *en fonction de* f_n
3. *En déduire que* $\mathbb{R}[X]$ *est stable par u et par v*
4. *Montrer que la restriction de u à* $\mathbb{R}_n[X]$ *est diagonalisable*
5. *Etablir pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *une relation entre* W_{n+2} *et* W_n*. En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
   $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$
6. *Etudier la monotonie de la suite* (W_n) *puis déterminer un équivalent simple à cette suite. En déduire sa limite.*

On considère pour tout $f \in E,\ M(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|$ *et* $N(f) = M(f) + M(f')$

7. *Montrer que N définie une norme sur E*
8. *Montrer que u est une application continue de* (E, M) *dans lui-même. Puis préciser la norme de u associée à M*
9. *Montrer que u est une application continue de* (E, N) *dans lui-même. Puis préciser la norme de u associée à N*
10. *L'application v est-elle continue de* (E, M) *dans lui-même ?*
11. *Montrer que v est une application continue de* (E, N) *dans* (E, M).
12. *Les normes N et M sont-elles équivalentes ?*

On admettra que $\mathbb{R}[X]$ *est dense dans* $(C^0(I, \mathbb{R}), M)$

13. *Soit* $f \in E$*, montrer qu'il existe une suite de polynômes* (p_n) *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, p_n(0) = f(0)$ *et* $M(p_n' - f') \to 0$ *(c'est à dire que* (p_n') *converge vers f' dans* (E, M) *) . En déduire que* $\mathbb{R}[X]$ *est dense dans* (E, N).
14. *Etudier la restriction de* uov *dans* $\mathbb{R}[X]$ *(on pourra calculer* $uov(f_n)$ *en fonction de* f_n*, lorsque* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) = x^n$ *)*
15. *Soit* $f \in E$*, déterminer* $uov(f)$.
16. *Montrer que v est injective .*

Sujet n°2 :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$, *on notera* $\langle \, , \rangle$ *son produit scalaire et* $\| \ \|$ *la norme associée.*

On note $L(E)$ *l'ensemble des endomorphismes de E et* $GL(E)$ *le groupe des automorphismes de E.*

Pour tout endomorphisme $u \in L(E)$, *on note* u^i *la composée* $uouo \ldots ouou$ *(i fois) et* $u^0 = Id$

On rappelle que si C est une partie convexe de E alors pour toute famille $(a_i)_{i=1..p}$ *d'éléments de C et toute famille de scalaires* $(\lambda_i)_{i=1..p}$ *telle que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, *alors* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$

On note H l'ensemble des $(\lambda_i)_{i=1}^{n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

On considère $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$ *telle que* $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$

Si F est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de F, l'ensemble $Conv(F) = \Phi(H \times F^{n+1})$, *c'est aussi la plus petite partie convexe contenant F.*

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ *sera noté* $M_n(\mathbb{R})$ *que l'on munit d'un produit scalaire* $\langle A, B \rangle = trace(A^T B)$ *et de sa norme associée* $\|A\| = \sqrt{trace(A^T A)}$

L'ensemble des matrices symétriques est noté $S_n(\mathbb{R})$ *et l'ensemble des matrices inversibles de* $M_n(\mathbb{R})$ *est noté* $GL_n(\mathbb{R})$

On définit $S_n^{++} = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \ \ telle \ \ que \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0, \ X^T M X > 0\}$

On note enfin $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ \ telle \ \ que \ M^T M = I_n\}$

Partie 1 : Préliminaires

1. *Montrer que* S_n^{++} *est une partie convexe de* $M_n(\mathbb{R})$
2. *Montrer que* $O_n(\mathbb{R})$ *est une partie compacte de* $M_n(\mathbb{R})$
3. *Si* $M \in O_n(\mathbb{R})$, *que vaut* $\det(M)$ *?*
4. $O_n(\mathbb{R})$ *est-elle une partie connexe ?*
5. *Soit K une partie compacte de E. Montrer que* $Conv(K)$ *est une partie compacte de E*
6. *Soit K une partie compacte de E. Montrer que* $\delta(K) = \sup_{(x,y) \in K^2} \|y - x\|$ *existe. Ce réel* $\delta(K)$ *s'appelle le diamètre de K*

Partie 2 : Résultats sur la compacité

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *pour laquelle il existe* $\varepsilon > 0, telque \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \neq p \Rightarrow \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$

7. *Montrer qu'une telle suite n'admet aucune valeur d'adhérence.*
8. *Soit K une partie compacte de E. Montrer que* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe un entier p non nul et une famille* $(x_i)_{i=1..p} \in K^p$ *tels que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_0(x, \varepsilon)$. *(on pourra raisonner par l'absurde)*

Soit I un ensemble dénombrable (c'est-à-dire en bijection avec $\mathbb{N}$) et une famille $\left(\Omega_i\right)_{i\in I}$ d'ouverts de E tels que $K\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$

9. *Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in K$, $\exists i\in I$ tel que $B_0\left(x,\alpha\right)\subset\Omega_i$ (on pourra à nouveau raisonner par l'absurde)*
10. *En déduire qu'il existe une famille finie $\left(\Omega_k\right)_{k=1..p}$ de $\left(\Omega_i\right)_{i\in I}$ telle que $K\subset\bigcup_{i=1}^{p}\Omega_i$*

Soit I un ensemble dénombrable et une famille $\left(F_i\right)_{i\in I}$ de parties fermées de K tels que $\bigcap_{i\in I}F_i=\varnothing$

11. *Montrer qu'il existe une famille finie $\left(F_k\right)_{k=1..p}$ de $\left(F_i\right)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p}F_k=\varnothing$*

<u>Partie 3 : Théorème du point fixe de Markov</u>

Soit K une partie compacte et convexe de E
Soit G un sous-groupe de $GL\left(E\right)$ qui soit une partie compacte de $GL\left(E\right)$

12. *Pour tout $x\in E$, justifier l'existence de $N_G\left(x\right)=\sup_{u\in G}\left\|u\left(x\right)\right\|$. Montrer alors que N_G est une norme sur E*
13. *Montrer que $\forall v\in G,\ \forall x\in E,\ N_G\left(v\left(x\right)\right)=N_G\left(x\right)$*
14. *Pour tout $\left(x,y\right)\in E^2,\ x\neq 0$, on a $N_G\left(x+y\right)=N_G\left(x\right)+N_G\left(y\right)$ si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $y=\lambda x$*

On considère $u\in L\left(E\right)$ et K stable par u. Pour tout $x\in K$, on note $x_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}u^i\left(x\right)$

15. *Montrer que $(x_n)\in K^{\mathbb{N}}$ et que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \|u(x_n)-x_n\|\leq\frac{\delta(K)}{n}$*
16. *Montrer qu'il existe $a\in K$ tel que $u\left(a\right)=a$ (a est un point fixe de u sur K)*

On suppose maintenant que K est stable par tous les éléments de G. Soit un entier r non nul et l'endomorphisme $u=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}u_i$ où $u_i\in G,\forall i\in [\![1,r]\!]$

17. *Montrer que K est stable par u et qu'il existe $a\in K$ tel que $u\left(a\right)=a$*
18. *Montrer que $N_G\left(u\left(a\right)\right)=\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}N_G\left(u_i\left(a\right)\right)$,*
19. *En déduire que pour tout $j\in[\![1,r]\!]$, $N_G\left(\sum_{i=1}^{r}u_i\left(a\right)\right)=N_G\left(u_j\left(a\right)\right)+N_G\left(\sum_{i\neq j}u_i\left(a\right)\right)$*
20. *En déduire que pour tout $j\in[\![1,r]\!]$, $\exists\lambda_j\geq 0$, telle que $u\left(a\right)=\dfrac{\lambda_j+1}{r}u_j\left(a\right)$*
21. *Montrer que $\forall j\in[\![1,r]\!], u_j(a)=a$.*
22. *En utilisant la question11, montrer l'existence de $a\in K$ tel que $\forall u\in G, u\left(a\right)=a$ (on introduira $F_u=\left\{a\in K \text{ tel que } u\left(a\right)=a\right\}$ pour tout $u\in G$)*

Partie 4 : Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ *et* $A \in G$*, on pose* $\rho_A : M \mapsto A^T MA$ *pour tout* $M \in M_n(\mathbb{R})$

23. *Montrer que l'application* $A \mapsto \rho_A(M)$ *est continue sur G*

On note $H = \{\rho_A \text{ telle que } A \in G\}, \Delta = \{A^T A \text{ tel que } A \in G\}$ *et* $K = Conv(\Delta)$

24. *Montrer que* $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$*et que H est un sous-groupe compact de* $GL(M_n(\mathbb{R}))$
25. *Montrer que* Δ *est une partie compacte de* S_n^{++}
26. *Montrer que K est une partie compacte de* S_n^{++} *stable par tous les éléments de H*
27. *Montrer qu'il existe* $M \in K$ *telle que* $\forall A \in G, \rho_A(M) = M$*.*

He deals the cards as a meditation
And those he plays never suspect
He doesn't play for the money he wins
He don't play for respect

He deals the cards to find the answer
The sacred geometry of chance
The hidden law of a probable outcome
The numbers lead a dance

I know that the spades are the swords of a soldier
I know that the clubs are weapons of war
I know that diamonds mean money for this art
But that's not the shape of my heart

He may play the jack of diamonds
He may lay the queen of spades
He may conceal a king in his hand
While the memory of it fades

I know that the spades are the swords of a soldier
I know that the clubs are weapons of war
I know that diamonds mean money for this art
But that's not the shape of my heart
That's not the shape
The shape of my heart

If I told her that I loved you
You'd maybe think there's something wrong
I'm not a man of too many faces
The mask I wear is one

But those who speak know nothing
And find out to their cost
Like those who curse their luck in too many places
And those who fear are lost

I know that the spades are the swords of a soldier
I know that the clubs are weapons of war
I know that diamonds mean money for this art
But that's not the shape of my heart
That's not the shape of my heart
That's not the shape
The shape of my heart