



David Corneillie : MP 2024-2025 Concours Blanc

DS n°5 : Mathématiques 4 heures : Mercredi 18/12/24

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Cours :

Enoncer le théorème de sommation par paquets pour une famille de réels positifs

Donner la définition d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé E

Donner 3 moyens différents pour démontrer que A est une partie compacte de E dans des situations particulières

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ peut-on affirmer que $u_n \rightarrow 0$?

Exercice n°1 :

Montrer que $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Exercice n°2 :

On munit l'ensemble E des fonctions réelles continues sur $[a, b]$ de la norme $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$

On admet que l'ensemble des polynômes est dense dans E muni de cette norme

On considère une fonction f de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0$

1. *Montrer que f est la fonction nulle*

Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$

2. *Pour tout entier naturel k , quelle est la limite de $t \mapsto t^k e^{-zt}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?*

3. *Montrer que pour tout entier naturel n , $t \mapsto t^n e^{-zt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$*

On note alors $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt} dt$

4. *Exprimer I_n en fonction de z et n*

On pose la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \sin\left(t^{\frac{1}{4}}\right) e^{-t^{\frac{1}{4}}}$

5. *A l'aide du changement de variable $u = t^{\frac{1}{4}}$, calculer $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$*

6. *Que pouvez-vous remarquer par rapport à la question 1 ?*

Problème :

Ce problème a pour but l'étude de restes de certaines séries convergentes

Partie 1

1. Justifier que le reste d'une série convergente est le terme général d'une suite qui converge vers 0
2. Rappeler la condition sur α pour que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ soit convergente

Dans ce cas on notera $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha}$, pour $n \in \mathbb{N}$

3. Déterminer un réel strictement positif k tel que R_n soit équivalent à $\frac{k}{n^{\alpha-1}}$
4. En déduire les valeurs de α pour que la série $\sum R_n$ converge

Partie 2 :

5. On pose maintenant $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\forall n > 0$. Justifier l'existence de $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}$ et donner une majoration de R_n
6. A l'aide d'une suite géométrique, montrer que : $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$
7. Par une intégration par partie, montrer qu'il existe un entier β et un réel k non nul tel que :
 $R_n = k \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$ (préciser β et k)
8. En déduire la nature de la série de terme général R_n . Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$

Partie 3 :

9. Prouver l'existence pour tout entier naturel n de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$
10. Prouver ensuite que $R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2}$
11. Pour tout entier $k > 0$, justifier l'encadrement suivant :

$$\int_{k+2}^{k+3} \frac{1}{4t^3} dt \leq \frac{4k+5}{(2k+2)^2 (2k+3)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$$

12. En déduire un encadrement de R_{2n+1} pour tout $n \geq 1$
13. En déduire les limites respectives des suites $\left((2n+1)^2 R_{2n+1}\right)$ et $\left((2n)^2 R_{2n}\right)$
14. On pose $J_n = (-1)^n R_n$, donner un équivalent à l'infini de J_n . En déduire la nature de la série de terme général J_n