



David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°6 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 10/01/25

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Cours :

Enoncer le théorème de sommation par paquets pour une famille de réels positifs

Enoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions (f_n)

Exercice n°1 :

On pose $u_n = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p}\right) - \ln(n)$, pour $n \geq 1$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note γ sa limite. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$, pour $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et déterminer sa somme

Exercice n°2 :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose pour tout entier n , $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$

On suppose que $u_n = o(1)$. Quelle est alors la limite de la suite (v_n) ?

Montrer que si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum v_n$ converge absolument et préciser sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$

Problème :

On note : $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$

On appelle unité approchée de $C_{2\pi}$ toute suite (ρ_n) de $C_{2\pi}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \rho_n &\geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt &= 1 \\ \forall \alpha \in]0, \pi[, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{-\alpha} \rho_n(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Partie 1 : Etude d'un exemple

1. Soit p un entier naturel, on pose $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^p dt$

Calculer I_p , on donnera le résultat sous forme de factoriels en fonction de la parité de p

Montrer que $I_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

2. Déterminer la suite (a_n) de réels positifs telle que la suite (ρ_n) définie par

$$\rho_n(x) = a_n \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n \text{ soit une unité approchée de } C_{2\pi}$$

Partie 2 : Un produit de convolution

Soit (ρ_n) une unité approchée de $C_{2\pi}$

3. Montrer que toute fonction f de $C_{2\pi}$ est uniformément continue sur $[-\pi, \pi]$

4. Pour tout f élément de $C_{2\pi}$, montrer que la suite de fonctions $(f * \rho_n)$ converge uniformément

$$\text{vers } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec : } \forall x \in \mathbb{R}, (f * \rho_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \rho_n(t) dt$$

(Rem : la fonction $f * \rho_n$ est le produit de convolution de f et de ρ_n)

Partie 3 : Le Théorème de Féjer

Soit f un élément de $C_{2\pi}$, on note : $\forall p \in \mathbb{Z}, e_p : t \rightarrow e^{ipt}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f) = \sum_{p=-n}^n c_p(f) e_p$

où $c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt, \forall p \in \mathbb{Z}$ (ce sont les coefficients de Fourier de f)

$\forall n \in \mathbb{N}, C_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n S_p(f)$ est la moyenne de Césaro des sommes partielles $S_n(f)$

$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \sum_{p=-n}^n e_p$ est le noyau de Dirichlet

$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n D_p$ est le noyau de Féjer, c'est aussi la moyenne de Césaro de la suite (D_n)

5. Montrer les formules suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_0(F_n) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, F_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$$

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : f * D_n = S_n(f)$ et $f * F_n = C_n(f)$

7. Montrer que la suite (F_n) est une unité approchée de $C_{2\pi}$

8. Montrer que si f est un élément de $C_{2\pi}$, alors la suite $(C_n(f))$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$

Partie 4 : Les nombres de Lebesgue

On appelle nombre de Lebesgue, le réel défini par $L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$

Soient x_0 un réel, n un entier naturel et μ_n l'application définie de $C_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\mu_n(f) = S_n(f)(x_0)$$

9. Montrer que μ_n est une forme linéaire

10. Sur $C_{2\pi}$ on choisit une norme $N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Montrer que : $\forall f \in C_{2\pi}, |\mu_n(f)| \leq L_n N_\infty(f)$

Que peut-on en déduire pour μ_n ?

11. Soit $\varepsilon > 0$, on définit sur $[-\pi, \pi]$ les fonctions g_0 et f_ε par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], g_0(t) = D_n(x_0 - t) \text{ et } f_\varepsilon(t) = \frac{g_0(t)}{|g_0(t)| + \varepsilon}$$

Montrer que $\mu_n(f_\varepsilon) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_0(t)| dt - \varepsilon$

12. En déduire la valeur de $\|\mu_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\mu_n(f)|}{N_\infty(f)}$

13. Après avoir justifié l'égalité suivante : $L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right|}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$

Montrer que $L_n \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$

14. En déduire la valeur de A telle que $L_n \geq A \ln(n+1)$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n\|$

*It's not time to make a change
Just relax, take it easy
You're still young, that's your fault
There's so much you have to know
Find a girl, settle down
If you want you can marry
Look at me, I am old but I'm happy*

*I was once like you are now and I know that it's not easy
To be calm when you've found something going on
But take your time, think a lot
Think of everything you've got
For you will still be here tomorrow but your dreams may not*

*Oh, how can I try to explain?
'Cause when I do he turns away again
It's always been the same, same old story
From the moment I could talk I was ordered to listen
Now there's a way and I know that I have to go away
I know I have to go*

*It's not time to make a change
Just sit down, take it slowly
You're still young, that's your fault
There's so much you have to go through
Find a girl, settle down
If you want you can marry
Look at me, I am old but I am happy*

*All the times that I've cried
Keepin' all the things I knew inside
It's hard but it's harder to ignore it
If they were right I'd agree
But it's them they know, not me
Now there's a way and I know that I have to go away
I know I have to go*