David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°7 : Mathématiques 4 heures : Vendredi 31/01/25

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Exercice :

Déterminer les solutions développables en série entière de : $\begin{cases} x^2 y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Problème :

Partie 1 :

Dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$

On définit la fonction L_α *par* $L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$

1. *Montrer que* L_α *est de classe* $C^\infty sur]-1,1[$
2. *Montrer que* $\forall x \in]-1,1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)$
3. *Pour tout* $x \in]-1,1[$*, établir une relation entre* $L'_{\alpha+1}(x)$ *et* $L_\alpha(x)$
4. *Pour tout* $x \in]-1,1[$ *, préciser les valeurs de* $L_\alpha(x)$ *lorsque* $\alpha = 0, \alpha = -1$ *et* $\alpha = 1$
5. *Dans cette question, on suppose* $\alpha \leq 1$*, en minorant* $L_\alpha(x)$ *pour* $x \in]0,1[$*. Déterminer la limite de* $L_\alpha(x)$ *lorsque x tend vers* 1.

Partie 2 :

Dans cette partie, $\alpha > 1$

6. *Montrer que* L_α *est continue sur* $[-1,1]$
7. *Déterminer* $\lim_{x \to 1} L'_2(x)$
8. *Montrer que l'application* $\phi : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ *est intégrable sur* $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x \leq 1$*, on pose* $K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du$.

9. *Montrer que* K_α *est définie et continue sur* $]-\infty, 1]$.
10. *Dans cette question, on suppose* $\alpha > 2$*. Montrer que* K_α *est de classe* C^1 *sur* $]-\infty, 1]$.
11. *On revient au cas général où* $\alpha > 1$*. Montrer que* K_α *est de classe* C^1 *sur* $]-\infty, 1[$.
12. *Prouver l'existence de* $G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ *et justifier que* $G_\alpha > 0$.
13. *Montrer que pour tout* $x \in [-1,1], x K_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x)$

On posera alors pour tout $x \in]-\infty, 1], L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du$*, et on admettra que l'application* L_α *ainsi définie et continue sur* $]-\infty, 1]$ *et de classe* C^1 *sur* $]-\infty, 1[$

14. *Montrer que pour tout* $x \leq 1$*, on a* $L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt} dt$

Partie 3 :

Dans cette partie $\alpha = 2$

15. *En admettant que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*, calculer la valeur de* $L_2(-1)$
16. *Montrer que la fonction* Φ *définie par* $\forall x \in \,]0,1[,\ \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + ln(x)\,ln(1-x)$ *est constante sur* $]0,1[$ *et vaut* $L_2(1)$.
17. *En déduire la valeur de* $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$.
18. *Prouver aussi que* $\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$.
19. *Calculer* $K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u$.

Désormais, on s'intéresse au prolongement de L_2 *obtenu à la question 14., à savoir*

$$\forall x < 0,\quad L_2(x) = -\frac{x}{G_2}\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs}\,\mathrm{d}s$$

20. *Montrer que pour tout* $x < 0$, $L_2(x) = \int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$
21. *Pour tout* $x < 0$*, calculer* $g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$
22. *Justifier la convergence de l'intégrale* $A = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$
23. *En précisant* $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\left(L_2(x) - g(x)\right)$*, donner un équivalent simple de* $L_2(x)$ *quand* x *tend vers* $-\infty$.