David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°8 : Mathématiques 4 heures : Lundi 24/02/25

Concours blanc : Epreuve de Maths 1

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Problème :

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.

$K$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes. $M_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont dans K .

$GL_n(K)$ sera l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$

Une matrice $A \in M_n(K)$ admet une décomposition de Dunford s'il existe un couple $(D,N) \in (M_n(K))^2$ vérifiant $A = D + N$ , $D$ est diagonalisable dans $M_n(K)$, $D \in K[A]$, $N$ est nilpotente et $DN = ND$

Le couple $(D,N)$ sera appelé la décomposition de Dunford de A. Lorsque cette décomposition existe, on démontrera l'unicité dans la partie 2

Préliminaires :

*Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, dont la matrice dans la base canonique de E est diagonale. Donner une base de vecteurs propres de u.*
*Une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont 2 à 2 distincts est-elle diagonalisable ?*

Partie 1 :

1. *Donner la décomposition de Dunford d'une matrice A diagonalisable dans* $M_n(K)$
2. *Donner la décomposition de Dunford d'une matrice A nilpotente*
3. *Le couple de matrices* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ *est-il la décomposition de Dunford de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *?*
4. *Soit B une matrice de* $GL_n(K)$ *et N une matrice nilpotente telles que* $BN = NB$. *Montrer que* $\det(B - N) = \det(B)$.
5. *Soit A une matrice de* $M_n(K)$ *dont le polynôme caractéristique est scindé. Montrer que si* $(D,N)$ *est la décomposition de Dunford de A alors A et D ont le même polynôme caractéristique.*
6. *Donner un exemple de matrice de* $M_2(\mathbb{R})$ *qui n'admet pas de décomposition de Dunford*
7. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. *Donner sa décomposition de Dunford*
8. *Calculer la matrice* $\exp(A)$ *où A est la matrice donnée en question 7.*

9. *Soit* $A \in M_n(K)$ *telle que* $A^2(A-I_n)=0$. *Montrer que le polynôme* $P(X)=X(X-1)$ *est annulateur de* $A^2$. *En déduire la décomposition de Dunford de A*

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

10. *A est-elle diagonalisable ? Déterminer* $\{\lambda,\mu\}$ *tel que* $Sp(A)=\{\lambda,\mu\}$ *où* $\lambda<\mu$
11. *Justifier l'existence et déterminer une base* $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *de E vérifiant les propriétés suivantes* $\varepsilon_1 \in \ker(u-\lambda Id)$, $\varepsilon_2 \in \ker(u-\mu Id)$ *et* $\varepsilon_3 \in \ker(u-\mu Id)^2$
12. *Déterminer la matrice B de u dans cette base et déterminer sa décomposition de Dunford*
13. *En déduire la décomposition de Dunford de A.*

Partie 2 :

On admettra que si $\chi_A$, le polynôme caractéristique de *A,* est scindé sur *K,* alors *A* admet une décomposition de Dunford

14. *Une matrice trigonalisable admet-elle une décomposition de Dunford ?*
15. *Soient u et v deux endomorphismes de l'espace vectoriel E de dimension n, qui commutent. On suppose que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v. ( on pourra introduire* $v_i$ *la restriction de v à un espace propre de u )*
16. *Soient A et B deux matrices de* $M_n(K)$ *diagonalisables qui commutent. Montrer que* $A-B$ *est diagonalisable.*
17. *Soient A et B deux matrices de* $M_n(K)$ *nilpotentes qui commutent. Montrer que* $A-B$ *est nilpotente.*
18. *Déterminer les matrices de* $M_n(K)$ *nilpotentes et diagonalisables.*
19. *Soit* $A \in M_n(K)$ *admettant une décomposition de Dunford* $(D,N)$. *Montrer que cette décomposition est unique.*

Partie 3 :

On pose $T_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{C})$

On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$

20. *L'ensemble* $D_n(\mathbb{C})$ *est-il un sous espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{C})$ *?*
21. *Soit* $P \in GL_n(\mathbb{C})$. *Montrer que l'application* $\phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\varphi(M)=P^{-1}MP$ *est continue sur* $M_n(\mathbb{C})$.
22. *Montrer que* $D_n(\mathbb{C})$ *est dense dans* $M_n(\mathbb{C})$
23. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *On pose* $(D,N)$ *sa décomposition de Dunford. Montrer que l'application* $A \mapsto D$ *n'est pas continue sur* $M_n(\mathbb{C})$.