David Corneillie : MP 2024-2025

DS n°9 : Mathématiques 4 heures : Mercredi 26/02/25

Concours blanc : Epreuve de Maths 2

L'usage de la calculatrice est interdit. L'usage de téléphone portable est interdit

Exercice 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur l'espace probabilisé (Ω, T, P) *telles que* $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

1. *Calculer* $P(X=Y)$
2. *Calculer* $P(X<Y)$
3. *Déterminer la loi de la variable aléatoire* $S = X+Y$

Exercice n°2 :

Sur l'espace probabilisé (Ω, T, P)*, on définit une suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ *de variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans* $\{-1,1\}$ *telle que* $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$

Pour toute variable aléatoire discrète X, on note $\Phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$

1. *Montrer que* $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$
2. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{sin(t)}{2^n}$
3. *Déterminer la limite simple de la suite de fonctions* $\left(\Phi_{X_n}\right)_{n\geq 1}$. *On notera H cette fonction*
4. *Montrer que* X_n *et* $-X_n$ *suivent la même loi*
5. *Etudier la limite simple de la suite de fonctions* $(\phi_n)_{n\geq 1}$ *définies par*
   $\phi_n(t) = E(cos(tX_n)), \forall t \in \mathbb{R}$

Exercice n°3 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n)!}$

Problème :

Pour tout réel s, on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre (E_s)

$$(E_s): \forall x \in]-1,1[, (1-x^2)y''(x) - 2(s+2)xy'(x) - 2(s+1)y(x) = 0$$

On appelle f_s *la solution de* (E_s) *sur* $]-1,1[$, *telle que* $f_s(0) = 0$ *et* $f_s'(0) = 1$

1: *Soit g_s la fonction définie sur* $]-1,1[$, *par* $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.

Montrer que g_s *est solution de* (E_s)

2: *Calculer* $g_s(0)$ *et* $g_s'(0)$. *En déduire que* f_s *est impaire*

3: *Déterminer une valeur de* α *pour que* $x \mapsto (1-x^2)^\alpha$ *soit solution de* (E_s)

(α s'exprimera en fonction de s)

4: *Soit* u_s *la fonction définie sur* $]-1,1[$, *par* $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$

Montrer que la dérivée u_s' *de* u_s *est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1*

5: *Calculer* $u_s(0)$ *et* $u_s'(0)$. *En déduire que* $\forall x \in]-1,1[, u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$

On choisit un réel positif $R \leq 1$.

Soit y une fonction impaire développable en série entière telle que $\forall x \in]-R,R[, y_s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$

6: *On suppose que y est solution de* (E_s). *Déterminer l'expression de* c_{n+1} *en fonction de* c_n

(on s'attachera à trouver $c_{n+1} = \frac{an+b}{an+d} c_n$ *où* $(a,b,d) \in \mathbb{R}^3$ *et b dépend de s)*

7: *Déterminer les valeurs de s pour lesquelles* (E_s) *admet une solution polynomiale impaire non nulle.*

8: *On suppose* $s \notin \left\{-n - \frac{3}{2} ; n \in \mathbb{N}\right\}$, *déterminer le rayon de convergence de* $y_s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$

9: *Montrer que* $\forall x \in]-1,1[, f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (2s+2k+1)\right] x^{2n+1}$

10: *Montrer que* $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}$ *où* Q_p *est un polynôme impair de degré* $2p+1$

11: *Calculer* $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ *et* $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$.