Exercice n°1 :

1. *On utilise l'égalité suivante* $1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right]$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$

Donc on obtient $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)-arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. *On a* $\int_0^1 \frac{ax+b}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{1+x+x^2}dx+\left(b-\frac{a}{2}\right)\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}dx$

Or $\int_0^1 \frac{2x+1}{1+x+x^2}dx=[ln(1+x+x^2)]_0^1=ln3$

Finalement $\int_0^1 \frac{ax+b}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}ln3+\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3. *On effectue une décomposition en éléments simples* $f(x)=\frac{x}{(x-1)(1+x+x^2)}=\frac{c}{x-1}+\frac{ax+b}{1+x+x^2}$

On obtient en évaluant en $1\ l'expression\ (x-1)f(x)$ *l'égalité* $c=\frac{1}{3}$

En évaluant en l'infini l'expression $xf(x)$, *on trouve* $c+a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

Or $f(0)=0=-c+b\Rightarrow b=\frac{1}{3}$

Finalement $f(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x-1}{1+x+x^2}$

4. *On a* $g(x)=-\frac{1}{3}\frac{x-1}{1+x+x^2}$ *Pour conclure on aura* $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}ln3+\frac{1}{2}\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(dans votre énoncé une erreur s'est glissée avec f au lieu de g, f n'étant pas continue sur $[0,1]$*, l'existence de l'intégrale n'est pas assurée. Si on* $0<\propto<1$ *, on peut calculer*

$$\int_0^{\propto}\frac{dx}{x-1}=ln(\propto-1)\ \ or\ cette\ expression\ n'a\ pas\ de\ limite\ lorsque\ \ \propto\to 1, on\ dit\ alors\ que$$

L'intégrale est divergente)

Exercice n°2 :

1. *Pour tout entier n on pose* $S_n=\sum_{p=0}^{n} w_p=u_{n+1}-u_0$

On suppose que la suite (u_n) *soit convergente on note L sa limite, alors la suite* (S_n) *converge vers* $L-u_0$ *ce qui assure la convergence de la série* $\sum w_n$

On suppose que la série $\sum w_n$ *soit convergente, on note S sa somme, ainsi* $u_n=S_{n-1}+u_0$*, donc la suite* (u_n) *converge vers* $S+u_0$

On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite (u_n) *et la convergence de la série* $\sum w_n$

2. *On sait que* $ch(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{2}+O(x^4)$
3. $w_n=\sum_{k=1}^{n+1} ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+k}}\right)-\sum_{k=1}^{n} ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)-1=ch\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\right)+ch\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)-ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-1$
4. *On effectue un développement limité de* w_n *car* $\frac{1}{\sqrt{an+b}}=o(1)$

On obtient $w_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2n+2} + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Soit $w_n = \frac{1}{(2n+2)(4n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *or* $\frac{1}{(2n+2)(4n+1)} \sim \frac{1}{8n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *comme* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge, on peut affirmer que* $\sum w_n$ *converge et donc d'après la question 1 la suite* (u_n) *converge*

Exercice n°3 :

1. *Soient* $(P, Q) \in (K[X])^2$ *et* $\lambda \in K$

alors $\Delta(P + \lambda Q)(X) = P(X+1) - P(X) + \lambda\big(Q(X+1) - Q(X)\big) = \Delta(P)(X) + \lambda\Delta(Q)(X)$

Ainsi Δ *est linéaire et definit bien un endomorphisme de* $K[X]$

2. *On suppose que P est de degré n ainsi* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Alors $\Delta(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k((x+1)^k - x^k)$

Or $(x+1)^k - x^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j$ *est un polynôme de degré* $k-1$, *ainsi* $\Delta(P)$ *sera un polynôme de degré au plus* $n-1$. *Cependant son coefficient d'ordre* $n-1$ *est* $a_n \binom{n}{n-1} = n a_n \neq 0$

En conclusion si P est de degré n alors $\Delta(P)$ *est de degré* $n-1$

3. Δ_d *est linéaire de* $K_d[X]$ *or d'après la question précédente si P est de degré inférieur à d.*

Son image sera aussi de degré inférieur à d (voir même $\leq d-1$ *) donc* $\Delta_d(P) \in K_d[X]$

Il s'agit bien d'un endomorphisme de $K_d[X]$

4. *On a* $P \in Ker(\Delta_d) \Leftrightarrow \Delta_d(P) = 0 \Leftrightarrow d^{\circ}\big(\Delta_d(P)\big) = -\infty$

Donc nécessairement P est un polynôme constant.

On vérifie aisément la réciproque donc $Ker\big(\Delta_p\big) = K$

Nous savons déjà que $Im(\Delta_d) \subset K_{d-1}[X]$

D'après le théorème du rang $dim\big(Im(\Delta_d)\big) = d + 1 - dim\big(Ker(\Delta_d)\big) = d = dim(K_{d-1}[X])$

Finalement $Im(\Delta_d) = K_{d-1}[X]$

5. *Soit P*$\in Ker(\Delta)$ *alors il existe un entier* $d = d^{\circ}(P) \Longrightarrow P \in Ker(\Delta_d) = K$ *or* $K \subset Ker(\Delta)$

Finalement $Ker(\Delta) = K$

Pour tout P$\in K[X], il\ existe\ d\ tel\ que\ P \in K_d[X] = Im(\Delta_{d+1}) \subset Im(\Delta)$

Finalement Δ *est surjectif*

6. *Si* $h \in K[X], alors\ \exists g \in K[X]\ tel\ que\ h = \Delta(g)$

Ainsi $f \in E_h \Leftrightarrow \Delta(f) = \Delta(g) \Leftrightarrow f - g \in ker(\Delta) \Leftrightarrow f = g + constante$

7. *On pose* $f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow \Delta(f)(x) = 2ax + a + b = x$

On trouve donc $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Les solutions de E_h *sont* $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$

Exercice n°4 :

1. *On pose 4 réels* (b_1, b_2, b_3, b_4) *tels que* $\sum_{k=1}^{4} b_k L_k = 0$ *si on évalue cette égalité en* $x = 1$, *on obtient immédiatement* $b_1 = 0$ *puis tout* $k \in \{2,3,4\}$, *si on évalue en* $\propto_k$ *on trouve* $b_k = 0$
La famille (L_k) *pour* $k \in [\![1,4]\!]$ *est donc libre*
Comme la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ est 4, *la famille* (L_k) *est donc bien une base de* $\mathbb{R}_3[X]$
2. *Le polynôme* L_1 *admet 3 racines* $(\propto_2, \propto_3, \propto_4)$ *et qu'il est de degré 3 alors il existe une constante K telle que* $L_1(x) = K(x - \propto_2)(x - \propto_3)(x - \propto_4)$ *or* $L_1(1) = 1 \Longrightarrow K = \frac{1}{(1-\propto_2)(x-\propto_3)(x-\propto_4)}$
Finalement $L_1(x) = \frac{(x-\propto_2)(x-\propto_3)(x-\propto_4)}{(1-\propto_2)(x-\propto_3)(x-\propto_4)}$
3. *On sait que* $\mathbb{R}_3[X] = Vect(L_k, k = 1,2,3,4)$, *il existe donc 4 scalaires* $(\beta_k, k = 1,2,3,4)$ *tels que* $P(x) = \sum_{k=1}^{4} \beta_k L_k(x)$, *si on évalue en* $x = \alpha_k$ *alors* $P(\alpha_k) = \beta_k$
Finalement $P(x) = P(1)L_1(x) + \sum_{k=2}^{4} P(\alpha_k)L_k(x)$

Exercice n°5 :

1. *On a immédiatement* $f(e_1) = (2,1)$ et $f(e_2) = (3,-4)$, *la matrice de f dans la base exprimée dans la base canonique est donc* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
2. *Exprimons la déterminant* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, *donc la famille* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est bien une base de E*
3. *Calculons* $f(\varepsilon_1) = (8,-7) = a(1,2) + b(2,1) \Rightarrow a = -\frac{22}{3}$ et $b = \frac{23}{3}$
De même $f(\varepsilon_2) = (7,-2) = c(1,2) + d(2,1) \Rightarrow c = -\frac{11}{3}$ et $d = \frac{16}{3}$
La matrice de f dans la nouvelle base est $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -22 & -11 \\ 23 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice n°6 :

1. *Les univers image de U et V sont* $\{0,1,2\}$ $donc$ $S(\Omega) = \{0,1,2\}$ *(immédiat en étudiant les valeurs possibles de S) de plus* $P(U = 0) = P(U = 2) = \frac{1}{4}$ et $P(U = 1) = \frac{1}{2}$
On a $P(S = 0) = P(U = 1, V = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$P(S = 1) = P(U = 0, V = 1) + P(U = 1, V = 0) + P(U = 1, V = 2) + P(U = 2, V = 1)$
Soit $P(S = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *et* $P(S = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
2. *L'univers image de T est également* $\{0,1,2\}$ *on a* $P(T = 0) = \frac{1}{8}$, $P(T = 1) = \frac{3}{4}$ *et* $P(T = 2) = \frac{1}{8}$
3. *On pose* $W = S(T - 1)$ *alors* $W(\Omega) = \{-2,-1,0,1,2\}$
On obtient $P(W = -1) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$, $P(W = -2) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$, $P(W = 1) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
De même $P(W = 2) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ *donc* $P(W = 0) = \frac{13}{16}$
On en déduit que $E\big(S(T - 1)\big) = 0$
4. *Par linéarité de l'espérance* $E(ST) = E(S)$ *et d'après la question1* $E(S) = 1$
Comme $E(T) = 1$ *alors* $Cov(S,T) = E(ST) - E(S)E(T) = 0$
5. *L'évènement* $(S = 0) \cap (T = 0)$ $se\ produit\ quand$ $(U = 1, T = 1)$ *se réalise en même temps que* $(U = 0, T = 2) \cup (U = 2, T = 0)$ *donc* $P(S = 0, T = 0) = 0$
Cependant $P(S = 0)P(T = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \neq 0$, *donc S et T ne sont pas indépendants*