Partiel :

Question 1 :

γ est positive et continue sur $]0, +\infty[$. $\forall t > 0, \gamma(t) \leq \frac{2}{t^2}$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in l^1([1, +\infty[) \Rightarrow \gamma \in l^1([1, +\infty[)$

$$\gamma(t) = \frac{t^2 + o(t^3)}{2t^2} = \frac{1}{2} + o(t) \Rightarrow \gamma \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \gamma \in l^1(]0, 1[)$$

Finalement γ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Question 2 :

On pose $g: (x, t) \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$

$\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

On a $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[, |g(x, t)| \leq \gamma(t)$ or $\gamma \in l^1(]0, +\infty[)$

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $t \mapsto g(x, t) \in l^1(]0, +\infty[)$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$

Question 3 :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $x_n \rightarrow +\infty$, et $\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = f(x_n, t)$.

(f_n) est continue sur $]0, +\infty[, (f_n)$ converge simplement vers $t \mapsto 0$ sur $]0, +\infty[$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, |f_n(t)| \leq \gamma(t)$ or $\gamma \in l^1(]0, +\infty[)$

D'après le théorème de convergence dominée $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 0$

Question 4 :

Soit $K = [a, +\infty[\subset]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-(1 - \cos t)}{t} e^{-xt}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} = \varphi(t)$$

$$\text{Or } t^2 \varphi(t) \xrightarrow{+\infty} 0 \Rightarrow \varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \varphi \in l^1([1, +\infty[)$$

$\varphi(t) \sim \frac{t}{2} \rightarrow 0, \varphi$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\varphi \in l^1(]0, 1[)$, finalement $\varphi \in l^1(]0, +\infty[)$

Donc d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégral, f est de classe C^1 sur toute partie compacte de $\mathbb{R}^{*+}$ donc C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$\text{Et } \forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt$$

Question 5 :

Les hypothèses de la question 4 permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée généralisé à la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt} \right) dt = 0$

Question 6 :

Soit $K = [a, +\infty[\subset]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos t) e^{-xt}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-at} = \phi(t)$$

Or $-a < 0 \Rightarrow \phi \in l^1(]0, +\infty[)$

Donc d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégral, f est de classe C^2 sur toute partie compacte de $\mathbb{R}^+$ donc C^2 sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{Et } \forall x > 0, f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$$

Question 7 :

$$f''(x) = \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} (e^{-xt} - e^{(i-x)t}) dt \right] = \operatorname{Re} \left[\left[\frac{-e^{-xt}}{x} - \frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-i} \right]$$

$$\forall x > 0, f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Question 8 :

$$f'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

$$\text{Nous savons que } \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \xrightarrow{+\infty} 0 \Rightarrow K = 0$$

$$\forall x > 0, f'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Question 9 :

$$\text{On pose } F(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan x, F \in C^1(]0, +\infty[)$$

$$F'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$$

$$\text{Donc } \exists C \in \mathbb{R}, \text{ tel que } f(x) = F(x) + C \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Or } \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2} \text{ donc } x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\text{et } \arctan x \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \forall x > 0, f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Or } f \text{ est continue en } 0 \text{ donc } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Question 10 :

$$\text{Si } s = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(0)}{t^2} dt = 0 = s$$

$$\text{Si } s \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt, \text{ on pose } t = |s|u \Leftrightarrow u = \frac{t}{|s|}$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(|s|u)}{s^2 u^2} |s| du = \frac{1}{|s|} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du \text{ car } \cos \text{ est paire.}$$

Finalemment $|s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du$

Partie 2 :

Question 11 :

$j_n(t) = \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$, j_n est C^0 sur $]0, +\infty[$

$j_n(t) \sim \frac{t^{2n}}{2t^2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} j_n(t) = \frac{1}{2}$ et $\sin > 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} j_n(t) = 0$, donc j_n est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$. De plus $|j_n(t)| \leq \frac{2}{t^2} \Rightarrow j_n \in l^1([1, +\infty[)$

Finalemment $j_n \in l^1(]0, +\infty[)$ et u_n existe pour tout entier n .

$u_{2n+2} - u_{2n} = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)^{2n} - (\cos t)^{2n+2}}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)^{2n} (1 - \cos^2 t)}{t^2} dt \geq 0$

Ainsi (u_{2n}) est croissante

Question 12 :

$u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)}{t^2} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}$

$u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^2}{t^2} dt$ or $1 - \cos^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{t^2} dt$

D'après la question 10. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} |2| \Rightarrow u_2 = \frac{\pi}{2}$

Question 13 :

On pose $t = \sqrt{\frac{2u}{n}} \Rightarrow u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{\frac{2u}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$

Question 14 :

Si $x \in]0, 1[$, $1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \Rightarrow 1 - x^n \leq n(1 - x)$

Ainsi $1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n \leq n \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right) = 2n \sin^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2u}{n}}\right)$

Sachant que $\sin \alpha \leq \alpha \Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2u}{n}}\right) \leq \frac{1}{4} \frac{2u}{n} = \frac{u}{2n}$

Finalemment $\forall u \in]0, 1]$, $\left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n\right| \leq u$.

Question 15 :

On pose $h_n(u) = \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{2\sqrt{u}}$ sur $]0, +\infty[$, h_n est continue sur $]0, +\infty[$

si $n \rightarrow +\infty$, $\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n = e^{n \ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)} = e^{n \ln\left(1 - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n \left(-\frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-u + o(1)}$

(h_n) CVS vers $u \mapsto \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ qui est C^0 sur $]0, +\infty[$

D'après la question 14.

$\forall u \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |h_n(u)| \leq \varphi(u)$ où $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ sur $]0, 1]$ et $\varphi(u) = \frac{2}{u\sqrt{u}}$ sur $1, +\infty[$

Cette fonction $\varphi \in l^1(]0, +\infty[)$

D'après le théorème de convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$

Question 16 :

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}} du = \left[-(1-e^{-u}) \frac{2}{\sqrt{u}} \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 e^{-u} \frac{2}{\sqrt{u}} du$

Or $\frac{1-e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{0}{\sim} \sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$ et $\sqrt{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \underset{0}{\rightarrow} 0$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{\pi}$

D'après la question 13. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{\sqrt{2}}$

Partie 3 :

Question 17 :

Si la famille $(g(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable alors $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$

Question 18 :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a $S_n(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$. $E(X_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et par linéarité de l'espérance

$E(S_n) = 0$. $V(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

Comme les variables (X_k) sont mutuellement indépendantes $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n$

Question 19 :

$(S_2 = 0) = ((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)) \cup ((X_1 = -1) \cap (X_2 = 1))$ (réunion disjointe d'événements indépendants)

$P(S_2 = 0) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

L'événement $(S_{2n+1} = 0)$ est impossible donc $P(S_{2n+1} = 0) = 0$

Question 20 :

$(S_{n+1} = s) = ((S_n = s-1) \cap (X_{n+1} = 1)) \cup ((S_n = n+1) \cap (X_{n+1} = -1))$ (réunion disjointe d'événements indépendants)

$P(S_{n+1} = s) = P(X_n = 1)P(S_n = s-1) + P(X_n = -1)P(S_n = s+1) = \frac{1}{2}(P(S_n = s-1) + P(S_n = s+1))$

Question 21 :

$E(|S_{n+1}|) = \sum_{s=-n-1}^{n+1} |s|P(S_{n+1} = s) = \frac{1}{2} \left(\sum_{s=-n-1}^{n+1} |s|P(S_n = s+1) + \sum_{s=-n-1}^{n+1} |s|P(S_n = s-1) \right)$

$E(|S_{n+1}|) = \frac{1}{2} \left(\sum_{s=-n}^{n+2} |s-1|P(S_n = s) + \sum_{s=-n-2}^n |s+1|P(S_n = s) \right)$

or $P(S_n = k) = 0$ si $k \notin \llbracket -n, n \rrbracket \Rightarrow E(|S_{n+1}|) = \sum_{s=-n}^n P(S_n = s) \left(\frac{|s-1| + |s+1|}{2} \right)$

Donc $E(|S_{n+1}|) - E(|S_n|) = \sum_{s=-n}^n P(S_n = s) \left(\frac{|s-1| + |s+1|}{2} - |s| \right)$

Calculons $A(s) = \frac{|s-1| + |s+1|}{2} - |s|$

Si $s \geq 1$, $A(s) = \frac{s-1+s+1}{2} - s = 0$

Si $s \leq -1$, $A(s) = \frac{-s+1-s-1}{2} + s = 0$

Si $s = 0$, $A(s) = 1$

Finalemnt $E(|S_{n+1}|) - E(|S_n|) = P(S_n = 0)$

Question 22 :

$\cos(S+T) = \cos S \cos T - \sin S \sin T \Rightarrow E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T) - E(\sin S \sin T)$

Comme S et T sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions $(\cos S, \cos T)$ et $(\sin S, \sin T)$ le sont aussi. Donc $E(\cos S \cos T) = E(\cos S)E(\cos T)$ et $E(\sin S \sin T) = E(\sin S)E(\sin T)$

T et $-T$ sont indépendantes, donc $E(\sin T) = E(\sin(-T)) = -E(\sin T) \Rightarrow E(\sin T) = 0$

Finalemnt $E(\cos(S+T)) = E(\cos T)E(\cos S)$

Question 23 :

Effectuons un raisonnement par récurrence

Si $n = 1$, $E(\cos(S_1 t)) = E(\cos(X_1 t)) = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos(-t) = \cos t$

On suppose que $E(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$

$E(\cos(S_{n+1} t)) = E(\cos(S_n t + X_{n+1} t)) = E(\cos(S_n t))E(\cos(X_{n+1} t)) = (\cos t)^n \cos t = (\cos t)^{n+1}$

Finalemnt $\forall n \geq 1$, $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$

Question 24 :

$E(|S_n|) = \sum_{s=-n}^n |s| P(S_n = s) = \frac{2}{\pi} \sum_{s=-n}^n P(S_n = s) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{s=-n}^n P(S_n = s) \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du$

$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2} \sum_{s=-n}^n P(S_n = s) - \frac{1}{u^2} \sum_{s=-n}^n \cos(su) P(S_n = s) \right) du$

or $\sum_{s=-n}^n P(S_n = s) = 1$ et $\sum_{s=-n}^n \cos(su) P(S_n = s) = E(\cos(S_n u)) = (\cos u)^n$

$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(u))^n}{u^2} du = \frac{2}{\pi} u_n$

Question 25 :

$\frac{2}{\pi} (u_{2n+2} - u_{2n+1}) = E(|S_{2n+2}|) - E(|S_{2n+1}|) = P(S_{2n+1} = 0) = 0 \Rightarrow u_{2n+2} = u_{2n+1}$