**Exercice n°1 :**

**1.** *Montrons que* $\Gamma$ *est une sous-algèbre de* $M_2(\mathbb{R})$

*On a* $\Gamma \subset M_2(\mathbb{R})$, $I_2F = FI_2$ *donc* $I_2 \in \Gamma \neq \emptyset$

*Soient* $(M,N) \in \Gamma^2$, $(M+\alpha N)F = MF + \alpha NF = FM + \alpha FN = F(M+\alpha N) \Longrightarrow M + \alpha N \in \Gamma$

*De même* $MNF = MFN = FMN \Longrightarrow MN \in \Gamma$

*Etudions maintenant la dimension de cette algèbre*

*On a* $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = ax - by \\ -bx + cz = az - bt \\ ay + bt = bx + cz \\ -by + ct = bz + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = -by \\ bx + cz = ay + bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = \frac{1}{b}(c-a)z + t \end{cases}$

*Ainsi* $\Gamma$ *est de dimension* 2

*Or* $(I_2, F) \in \Gamma^2$ *est forme une famille libre, donc on a bien une base et* $\Gamma = Vect(I_2, F)$

2. *Pour tout entier naturel n,* $F^n \in \Gamma \Longrightarrow F^n = \alpha_n F + \beta_n I_2$
3. *Après calcul* $F^2 = (a+c)F - (b^2 + ac)I_2 \Longrightarrow \alpha_2 = a + c$ *et* $\beta_2 = -b^2 - ac$
4. *On a* $F^{n+1} = (\alpha_n F + \beta_n I)F = \alpha_n F^2 + \beta_n I = \alpha_n(\alpha_2 F + \beta_2 I) + \beta_n F$.
   *En vertu de l'unicité de la décomposition* $\alpha_{n+1} = \alpha_2\alpha_n + \beta_n$ *et* $\beta_{n+1} = \beta_2\alpha_n$
   *On obtient alors* $\alpha_{n+2} = \alpha_2\alpha_{n+1} + \beta_2\alpha_n$
5. *Application numérique* $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$, *les solutions de l'équation caractéristique sont*
   $-1$ *et* $3 \Longrightarrow \alpha_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ *or* $\alpha_0 = 0$ *et* $\alpha_1 = 1 \Longrightarrow \alpha_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$
   *Et par suite* $\beta_n = \frac{2}{3}(2)^{n-1} - \frac{2}{3}(-1)^{n-1}$
6. *Dans cette application, on a toujours* $\alpha_2 = 1$ *et* $\beta_2 = 2 \Longrightarrow F^2 = F + 2I$
   *La matrice* $M = xF + yI$ *est inversible dans* $\Gamma$ *si et seulement s'il existe* $(x', y')$ *tel que on ait*
   $(xF + yI)(x'F + y'I) = I \Leftrightarrow (xx' + xy' + yx')F + (2xx' + yy')I = I$
   *Par indépendance linéaire de* $(I, F)$, *on obtient le système* $\begin{cases} x'(x+y) + y'x = 0 \\ x'2x + y'y = 1 \end{cases}$
   *Ce système admet une unique solution* $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+y & x \\ 2x & y \end{vmatrix} = y^2 + xy - 2x^2 \neq 0$
   *On peut observer que* $y^2 + xy - 2x^2 = (y-x)(y+2x)$
   *La matrice* $M = F - I \in \Gamma$ *mais n'est pas inversible donc ce n'est pas un corps*

**Problème :**

Partie 1 :

*1.* $\forall n \in \mathbb{N}^*, f * \delta(n) = \sum_{d/n} f(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right)$

*or* $\frac{n}{d} = 1 \Leftrightarrow d = n$, *donc* $\delta\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \Leftrightarrow d \neq n$ *ainsi* $\forall n \in \mathbb{N}^*, f * \delta(n) = f(n)$

*De même* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta * f(n) = \sum_{d/n} \delta(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$ *et* $\delta(d) = 0 \Leftrightarrow d \neq 1$

*ainsi* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta * f(n) = f(n)$ *soit* $\forall f \in A, \quad f * \delta = \delta * f = f$. *En conclusion :* $\delta$ *est neutre pour* *

*2.* $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 telque n = d_1 d_2\}$

*$d \in D_n \Leftrightarrow \exists d' \in \mathbb{N}^*$ tel que $dd' = n \Leftrightarrow \exists d' \in \mathbb{N}^*$ tel que $(d,d') \in C_n$, les ensembles $D_n$ et $C_n$ sont en bijection. Ainsi $Card(D_n) = Card(C_n)$ et $(f*g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in C_n} f(d_1)g(d_2)$*

*3. $(d_1,d_2) \in C_n \Leftrightarrow (d_2,d_1) \in C_n$*

*$(f*g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in C_n} f(d_1)g(d_2) = \sum_{(d_2,d_1)\in C_n} g(d_2)f(d_1) = (g*f)(n)$ Finalement $*$ est commutative*

*4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, C'_n = \{(d_1,d_2,d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3 telquen = d_1d_2d_3\}$*

*$(d,d_3) \in C_n \Leftrightarrow (d_1,d_2) \in C_d$ et $(d_1,d_2,d_3) \in C'_n$*

*$(f*g)*h(n) = \sum_{(d,d_3)\in C_n} (f*g)(d)h(d_3)$ or $(f*g)(d) = \sum_{(d_1,d_2)\in C_d} f(d_1)g(d_2)$*

*Donc $(f*g)*h(n) = \sum_{(d_1,d_2,d_3)\in C'_n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) = \sum_{(d_1,d)\in C_n} f(d_1)(g*h)(d) = f*(g*h)(n)$*

*Finalement * est associative.*

*5. $\forall (f,g) \in A^2$, $(f*g)(1) = f(1)g(1)$, donc si $f(1) = 0$ alors $f*g \neq \delta$*

*Ainsi si $f(1) = 0$ alors f n'a pas de symétrique pour **

*$(A,*)$ n'est donc pas un groupe*

*6. Il est clair que $(A,+)$ est un groupe abélien*

*En effet $A \neq \varnothing$ car $\delta \in A$, $\forall (f,g) \in A^2$, $f+g = g+f \in A$*

*Soit $\theta: \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\theta(n) = 0$, $f+\theta = \theta+f = f$ et $f-f=\theta$ avec $-f \in A$*

*De plus la loi * est unifère, interne et associative. On peut montrer également qu'elle est distributive par rapport à la loi +*

$$\begin{aligned}(f+g)*h(n) &= \sum_{(d_1,d_2)\in C_n} \big(f(d_1)+g(d_1)\big)h(d_2) = \sum_{(d_1,d_2)\in C_n} f(d_1)h(d_2) + \sum_{(d_1,d_2)\in C_n} g(d_1)h(d_2)\\ &= (f*h)(n)+(g*h)(n)\end{aligned}$$

*Finalement $(A,+,*)$ est un anneau.*

<u>Partie 2 :</u>

*7. On considère $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 telquem \wedge n = 1$*

*<u>1°cas</u> : si $n=1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m) = \mu(m)\mu(n)$ car $\mu(n)=1$*

*$m=1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(n) = \mu(m)\mu(n)$ car $\mu(m)=1$*

*<u>2° cas</u> : $m = \prod_{i=1}^{r} p_i$ et $n = \prod_{j=1}^{s} q_j$, comme $m \wedge n = 1 \Rightarrow p_i \neq q_j$*

*Alors $\mu(mn) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \mu(m)\mu(n)$*

*3° cas : n ou m possède un diviseur du type $p^2$ alors $p^2$ divise aussi mn*

*Donc* $\mu(mn)=0=\mu(m)\mu(n)$

*Finalement* $\mu$ *est multiplicative.*

*8. Pour cela on considère l'application* $\pi : D_n \times D_m \to D_{nm}$ *où* $n \wedge m = 1$, *telle que* $\pi(d_1,d_2)=d_1d_2$

*Comme n et m sont premiers entre eux* $Card(D_n \times D_m) = Card(D_{nm})$

$\forall (d_1,d_2) \in D_n \times D_m \ , d_1d_2 \in D_{nm}$

$\forall d \in D_{nm}, \exists k \in \mathbb{N}, nm = kd$, *on pose alors* $d_1 = d \wedge n \in D_n$ *et* $d_2 = \dfrac{d}{d_1}$ *divise* $d$ *donc divise nm*

$d_2 / nm$ *et* $d_2 \wedge n = 1 \Rightarrow d_2 \in D_m$, *ainsi* $d = d_1d_2 \Rightarrow \pi$ *est surjective donc bijective*

*Soit* $n \wedge m = 1 \Rightarrow (f*g)(nm) = \sum\limits_{d \in D_{nm}} f(d) g\left(\dfrac{nm}{d}\right)$

$\forall d \in D_{nm}, \exists (d_1,d_2) \in D_n \times D_m$ *tel que* $d = d_1d_2$ *et* $d_1 \wedge d_2 = 1$

*alors* $nm = kd = kd_1d_2$ *et* $k = k_1k_2$

$$(f*g)(nm) = \sum_{(d_1,d_2)\in D_n \times D_m} f(d_1d_2) g\left(\frac{nm}{d_1d_2}\right)$$

*Les fonctions f et g sont multiplicatives,* $f(d_1d_2) = f(d_1)f(d_2)$ *et* $g(k_1k_2) = g(k_1)g(k_2)$

$$(f*g)(nm) = \sum_{d_1 \in D_n} f(d_1) g\left(\frac{n}{d_1}\right) \sum_{d_2 \in D_m} f(d_2) g\left(\frac{m}{d_2}\right) = (f*g)(n)(f*g)(m)$$

*9.* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *n se décompose de manière unique comme produits de nombres premiers :* $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$ *avec*

$p_i^{k_i} \wedge p_j^{k_j} = 1$ *si* $i \neq j$ *. Comme f est multiplicative,* $f(n) = f\left(\prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\right) = \prod\limits_{i=1}^{r} f\left(p_i^{k_i}\right)$ *or* $f\left(p_i^{k_i}\right) = g\left(p_i^{k_i}\right)$

*Ainsi* $f(n) = \prod\limits_{i=1}^{r} g\left(p_i^{k_i}\right) = g\left(\prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\right) = g(n)$. *On a bien* $f = g$

*10. D'après la question 8.* $\mu * 1$ *est multiplicative*

*Utilisons la question 9., on considère un nombre premier p et un entier naturel k*

$(\mu * 1)(1) = \mu(1)1(1) = 1$

$$(\mu * 1)(p) = \sum_{d/p} \mu(d) 1\left(\frac{p}{d}\right) = \mu(1) + \mu(p) = 1 - 1 = 0$$

$$(\mu * 1)(p^k) = \sum_{d/p^k} \mu(d) 1\left(\frac{p^k}{d}\right) = \mu(1) + \mu(p) + \sum_{i=2}^{k} \mu(p^i) = 1 - 1 = 0$$

*Ainsi* $\forall k \in \mathbb{N}, (\mu * 1)(p^k) = \delta(p^k)$*, Finalement* $\mu * 1 = \delta$.

*11.* $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum_{d/n} f(d) = \sum_{d/n} f(d) 1\left(\frac{n}{d}\right) \Rightarrow F = f * 1$

*Or* $\mu * 1 = \delta = 1 * \mu$ *donc* $F * \mu = f * 1 * \mu = f * \delta = f$

*Soit si* $f = F * \mu = \mu * F \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d/n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$

*12. On sait que* $(\mu * Id)$ *est multiplicative*

*Utilisons a nouveau la question 9., on considère un nombre premier p et un entier naturel k*

$$(\mu * Id)(1) = 1 = \phi(1)$$

$$(\mu * Id)(p^k) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i) Id(p^{k-i}) = \mu(1)p^k + \mu(p)p^{k-1} car \mu(p^i) = 0 \text{ si } i \geq 2$$

$$= p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) = \phi(p^k)$$

*Ainsi* $\forall k \in \mathbb{N}, (\mu * Id)(p^k) = \phi(p^k)$*, Finalement* $\mu * Id = \phi$.

**<u>Problème ou exercice n°2 :</u>**

*Le corrigé sera fait en classe*