Problème :

On montre que $(C(A),+,.,\times)$ *est une sous-algèbre de* $M_n(\mathbb{R})$

On a immédiatement $C(A) \subset M_n(\mathbb{R})$, $I_nA = AI_n \Longrightarrow I_n \in C(A) \neq \emptyset$

Pour $(B,C) \in \left(C(A)\right)^2$, $(\propto B + C)A = \propto BA + CA = \propto AB + AC = A(\propto B + C) \Longrightarrow \propto B + C \in C(A)$

De même $BCA = BAC = ABC \Longrightarrow BC \in C(A)$. *Finalement* $(C(A),+,.,\times)$ *est une algèbre*

Partie 1 :

1. *Pour tout matrice A, il existe* (S,T) *telle S soit symétrique, T antisymétrique et* $A = S + T$ *car l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires*
   Si $AA^T = A^TA$ *alors* $(S+T)(S-T) = (S-T)(S+T) \Longrightarrow TS - ST = ST - TS \Longrightarrow TS = ST$
   Si $TS = ST$ *alors* $AA^T = S^2 - T^2$ *et* $A^TA = S^2 - T^2$ *d'où le résultat*
   Finalement $A^TA = AA^T$ *si et seulement si il existe une matrice S symétrique et T antisymétrique telles que* $A = S + T$ *et* $ST = TS$
2. *On suppose que* $AP = PA$ *alors le noyau et l'image de l'une des matrices (prenons P) est stable par l'autre (prenons A)*
   Réciproquement : on pose $A = mat(f,\beta)$ *et* $P = mat(p,\beta)$, *on suppose que* Imp *et* $Kerp$ *sont stables par f, nous savons que* $E = Imp \oplus Kerp$ *donc* $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$
   Alors $fop(x) = fop(x_1) + fop(x_2) = f(x_1)$
   $pof(x) = pof(x_1) + pof(x_2)$ *or* $kerp$ *est stable par f donc* $f(x_2) \in kerp \Longrightarrow pof(x_2) = 0$
   De même Imp *est stable par f donc* $f(x_1) \in Imp \Longrightarrow pof(x_1) = f(x_1)$
   Finalement $pof(x) = fop(x) \Longrightarrow PA = AP$

Partie 2 :

3. *Le polynôme caractéristique de A est* $\chi_A(x) = (x-1)(x-4)^2$
   Or $E_1(A) = Vect((1,1,2)^T)$ *et* $E_4(A) = Vect((1,2,0)^T, (0,1,1)^T)$
   La somme des dimensions des espaces propres est égale à la dimension de l'espace, donc la matrice A est diagonalisable
4. *La matrice B est de rang 1, donc 0 est valeur propre de multiplicité supérieure à 2. Cependant la trace de B vaut 3, donc 3 est la dernière valeur propre, ainsi* $\chi_B(x) = x^2(x-3)$
   La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique, donc B est diagonalisable
   De plus $AB = BA$, *d'après le théorème de diagonalisation simultanée il existe* $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP$ *et* $P^{-1}BP$ *soient toutes les deux diagonales.*
5. *Etudions les espaces propres de B.*
   On trouve $E_3(B) = Vect((1,1,-1)^T)$ *et* $E_0(B) = Vect((1,0,1)^T, (0,1,1)^T)$
   On a donc $E_1(A) \subset E_0(B)$ *car* $(1,1,2) = (1,0,1) + (0,1,1)$
   De même $E_3(B) \subset E_4(A)$ *car* $(1,1,-1) = (1,2,0) - (0,1,1)$
   De plus $(0,1,1)^T \in E_4(A) \cap E_0(B)$
   On considère alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie 3 :

6. *Le polynôme caractéristique de A est* $\chi_A(x) = (x-4)(x-2)$. *Il est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley Hamilton* $(A - 4I_2)(A - 2I_2) = 0$.
   Donc si $A = M^2$ *alors* $(M^2 - 4I_2)(M^2 - 2I_2) = 0$

Le polynôme $(x^2-4)(x^2-2)=(x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ *est annulateur de M, ainsi M possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc M est diagonalisable.*

7. *A et M sont diagonalisables or* $MA = A^3 = AM$, *d'après le théorème de diagonalisation simultanée il existe* $P \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP$ *et* $P^{-1}MP$ *soient toutes les deux diagonales.*
   On note $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1}MP = \Delta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$
8. *On a* $M^2 = A \Leftrightarrow P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow \Delta^2 = D \Leftrightarrow x^2 = 4$ *et* $y^2 = 2$
   Les 4 solutions sont donc $M = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$; $M = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$; $M = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$
   Et $M = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$

Partie 4 :

9. *On a* $vo(u-\lambda Id) = vou - \lambda v = uov - \lambda v = (u-\lambda Id)ov$, *donc v et* $u-\lambda Id$ *commutent. On peut affirmer que le noyau de* $u-\lambda Id$ *est stable par v.*
10. *Comme* $E_\lambda(u)$ *est stable par v, alors la restriction de v à cet espace, c'est-à-dire w est un endomorphisme de* $E_\lambda(u)$. *Comme v est diagonalisable, le polynôme minimal de v est scindé à racines simples (SARS). Ce polynôme annule aussi w qui possède donc un polynôme annulateur SARS, ce qui assure que w soit diagonalisable.*
11. *On pose* β_k *une base de* $E_{\lambda_k}(u)$ *qui diagonalise la restriction de v à* $E_{\lambda_k}(u)$
    Si $Sp(u) = \{\lambda_k, k = 1..p\}$ *comme* $E = \oplus E_{\lambda_k}$, *on construit la base* $\beta = \cup\, \beta_k$ *c'est une base constituée de vecteurs propres de u mais aussi de chaque restriction de v donc de v*
    Cette base diagonalise simultanément u et v

Partie 5 :

12. *Si N est nilpotente alors son polynôme minimal est* x^p *où p est l'ordre de nilpotence, si N n'est pas nulle alors* $p \geq 2$, *le polynôme minimal est scindé avec une racine multiple donc N n'est pas diagonalisable.*
13. *Si* $x \notin Sp(A)$ *alors la matrice* $A - xI_n$ *est inversible, ce qui garantit l'existence de la matrice N*
    On a $N = B(A-xI_n)^{-1}$ *donc* $B = N(A-xI_n)$
    Cependant $AB = BA \Rightarrow (A-xI_n)B = B(A-xI_n) \Rightarrow B(A-xI_n)^{-1} = (A-xI_n)^{-1}B$
    Comme B est nilpotente $B^p = 0 \Rightarrow N^p = B^p(A-xI_n)^{-p} = 0$
    N est bien nilpotente
14. *Par calcul* $\chi_{A+B}(x) = det(xI_n - A - B) = det(xI_n - A)det(I_n - N)$
    Or N est nilpotente, donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, la matrice $I_n - N$ *est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec de 1 sur la diagonale, donc son déterminant vaut 1* $\Longrightarrow \chi_{A+B}(x) = det(xI_n - A) = \chi_A(x)$
    Cette égalité polynômiale est valable pour tout réel x qui n'est pas une valeur propre de A, donc la différence est un polynôme qui admet une infinité de racines donc il est nul.
15. *La matrice nulle appartient à N qui n'est donc pas vide.*
    Soit A et B deux matrices de N, on a $A^p = 0$ *et* $B^q = 0$ *et* $AB = BA$
    On calcule $(A+B)^{p+q} = \sum_{j=0}^{p}\binom{p+q}{j}A^jB^{p-j}B^q + \sum_{j=p+1}^{p+q}\binom{p+q}{j}A^{j-p}B^{p+q-j}A^p = 0$
16. *Si A est dans N alors A est trigonalisable avec des 0 sur la diagonale, il existe donc P inversible et T triangulaire supérieure telles que* $A = PTP^{-1}$
    Or $T = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} t_{i,j}E_{i,j} \Longrightarrow A = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} t_{i,j}PE_{i,j}\,P^{-1}$
    Ainsi $N \subset Vect(PE_{i,j}P^{-1}, i = 1..n-1, j = i+1..n)$ *donc* $DimN \leq \frac{n(n-1)}{2}$
17. *N est un sous espace vectoriel de dimension finie donc N est une partie fermée*