

Exercice n°1 :

1. On a $u_n - v_n = \ln(n)$ or $\frac{\ln(n)}{n} = o(1) \Rightarrow u_n - v_n = o(u_n)$
Donc les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes
2. On a $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} = e^{\ln(n)} = n$ qui ne tend pas vers 1, donc les suites (e^{u_n}) et (e^{v_n}) ne sont pas équivalentes.
3. Si les suites (e^{a_n}) et (e^{b_n}) sont équivalentes alors $e^{a_n - b_n} \rightarrow 1 \Rightarrow a_n - b_n = o(1)$
Réciproquement, si $a_n - b_n = o(1)$ alors $e^{a_n - b_n} \rightarrow 1 \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$
4. On suppose que $a_n \sim b_n$
On a clairement $(a_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(a_n)}$ et $\frac{1}{n} \ln(a_n) - \frac{1}{n} \ln(b_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 0$
D'après la question 3 on aura l'équivalence des suites $\left((a_n)^{\frac{1}{n}}\right)$ et $\left((b_n)^{\frac{1}{n}}\right)$.

Exercice n°2 :

1. Soit $(A, B) \in S_n^{++}$ et $t \in [0, 1]$ on pose $M = tA + (1 - t)B \Rightarrow M^T = M$ car $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0, X^T M X = t(X^T A X) + (1 - t)X^T B X \geq 0 \text{ car } X^T A X > 0 \text{ et } X^T B X > 0$$

$$\text{Si } t = 0 \Rightarrow X^T M X = X^T B X > 0$$

$$\text{Si } t \neq 0 \Rightarrow X^T M X = t(X^T A X) + (1 - t)X^T B X \geq t(X^T A X) > 0$$

Finalement $M \in S_n^{++} \Rightarrow [A, B] \subset S_n^{++}$ qui est bien une partie connexe

2. On considère l'application $\phi: M \mapsto M^T M - I_n$ elle est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

Or $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), M^T M = I_n \Rightarrow \|M\| = \sqrt{n}, \text{ ainsi } O_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie bornée}$$

Finalement $M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$

3. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M^T M) = \det(M^T) \det(M) = (\det(M))^2 = 1 \Rightarrow \det(M) = \pm 1$
4. On a immédiatement $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{1, -1\}$ qui n'est pas un intervalle, donc n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$.
Si $O_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe alors son image par une application continue sera aussi connexe, le déterminant étant continue, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas une partie connexe

Problème :

Q1. Puisque f est dans E , f et f' sont continues sur $[-a, a]$, or $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in [-a, a], x \sin t \in [-a, a]$.

Ainsi $t \mapsto f(x \sin t)$ et $t \mapsto f'(x \sin t)$ sont continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $u(f)$ et $v(f)$ existent bien.

Q2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) = x^n. \forall x \in I, u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n t \, dt = x^n \frac{2}{\pi} W_n. \text{ Donc } u(f_n) = \frac{2}{\pi} W_n f_n.$

$$\forall x \in I, v(f_n)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^n \sin^{n-1} t \, dt = x^n n W_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } v(f_0)(x) = 1$$

Donc $v(f_n) = n W_{n-1} f_n$ si $n \neq 0$ et $v(f_0) = f_0$

Q3. $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(x) = \sum_{n=0}^d \alpha_n f_n(x)$, d'après la question 2. $u(f_n)$ et $v(f_n)$ sont des polynômes et comme u et v sont linéaires je peux affirmer que $u(P)$ et $v(P)$ seront des polynômes

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P)(x) = \sum_{n=0}^d \alpha_n u(f_n)(x) \text{ et } v(P)(x) = \sum_{n=0}^d \alpha_n v(f_n)(x).$$

Q4. Pour tout entier k inférieur à n , on a $u(f_k) = \frac{2}{\pi} W_k f_k$ donc f_k est vecteur propre de u associé à la valeur propre $\frac{2}{\pi} W_k$.

Ainsi $(f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille libre de $n + 1$ vecteurs propres, soit une base $\mathbb{R}_n[X]$ de vecteurs propres de u , finalement la restriction de u à $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable

Q5. A l'aide d'une intégration par parties sur le calcul de W_{n+2} , j'obtiens $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \sin(t) \, dt = \left[-\sin^{n+1}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n(t) \cos^2(t) \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) \, dt \quad (\text{car } \cos^2 t = 1 - \sin^2 t) \end{aligned}$$

$$W_{n+2} = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

On démontre l'égalité demandée par récurrence

$$\text{Si } n=0, \quad W_0 W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(0+1)}$$

$$\text{On suppose que } W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \text{ alors } W_{n+1} W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+2)} \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Q6. $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t) \Rightarrow W_{n+1} \leq W_n. \text{ Ainsi } (W_n) \text{ est décroissante.}$

$$\text{On a } W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n \Rightarrow \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

$$\text{Ainsi } W_n \sim W_{n+1} \Rightarrow W_{n+1} W_n \sim W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Finalement, je peux affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$.

Q7. M définit bien une norme sur les fonctions continues sur un segment, comme f et f' sont continues sur I , je peux affirmer que $f \in E, N(f) = M(f) + M(f') \in \mathbb{R}^+$

$$N(f) = 0 \Rightarrow M(f) = 0 \text{ et } M(f') = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ et } f' = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$N(\lambda f) = M(\lambda f) + M(\lambda f') = |\lambda| (M(f) + M(f')) = |\lambda| N(f)$$

$$N(f + g) = M(f + g) + M(f' + g') \leq M(f) + M(g) + M(f') + M(g') = N(f) + N(g).$$

Finalement N est une norme sur E .

Q8. $\forall x \in I, |u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f) dt = M(f)$

Ainsi $M(u(f)) \leq M(f)$. Donc u est continue de (E, M) dans (E, M) .

On en déduit que $\|u\| \leq 1$ et si on considère $f_0(x) = 1$ alors $u(f_0)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \Rightarrow 1 \leq \|u\|$

Finalement $\|u\| = \sup \left(\frac{M(u(f))}{M(f)} \right) = 1$

Q9. $(u(f))'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f'(x \sin t) dt$

$$\forall x \in I, |u(f)'(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| |f'(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f') dt = M(f')$$

Donc $M(u(f)') \leq M(f')$ or $M(u(f)) \leq M(f) \Rightarrow N(u(f)) \leq N(f)$

Finalement u est continue de (E, N) dans (E, N) .

On en déduit que $\|u\| \leq 1$ et si on considère $f_0(x) = 1$ alors $u(f_0)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1$ et $u(f_0')(x) = 0$ donc $N(u(f_0)) = 1 \Rightarrow 1 \leq \|u\|$

Finalement $\|u\| = \sup \left(\frac{N(u(f))}{N(f)} \right) = 1$

Q10. On utilise à nouveau $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) = x^n$

Si $n \neq 0$ alors $v(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} n W_{n-1} x^{n-1}$, ainsi $\frac{M(v(f_n))}{M(f_n)} = \frac{n W_{n-1} a^n}{a^n} = n W_{n-1} \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \rightarrow +\infty$

Il est donc impossible de trouver K tel que $\forall f \in E, M(v(f)) \leq K M(f)$

Finalement v n'est pas continue de (E, M) dans (E, M) .

Q11. $\forall x \in I, |v(f)(x)| \leq |f(0)| + |x| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x \sin t)| dt \leq M(f) + a \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f') dt \leq M(f) + a \frac{\pi}{2} M(f')$

Soit $K = \max \left(1, \frac{a\pi}{2} \right)$, $\forall x \in I, |v(f)(x)| \leq K (M(f) + M(f')) = K N(f)$

Soit $M(v(f)) \leq K N(f)$ et ainsi v est continue de (E, N) dans (E, M) .

Q12. Sachant que v est continue de (E, N) dans (E, M) , si les normes N et M étaient équivalentes alors v serait continue de (E, M) dans (E, M) . Ce qui est faux d'après la question 9.

Finalement les normes N et M ne sont pas équivalentes.

Q13. Si $f \in E$ alors $f' \in E = \overline{\mathbb{R}[X]} \Rightarrow \exists (Q_n) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que $M(Q_n - f') \rightarrow 0$

On définit la suite de polynôme (P_n) telle que $P_n(x) = \int_0^x Q_n(t) dt + f(0)$ on a bien $P_n(0) = f(0)$

De plus $M(P_n' - f') = M(Q_n - f') \rightarrow 0$

$\forall x \in I, |P_n(x) - f(x)| = \left| \int_0^x (Q_n(t) - f'(t)) dt \right| \leq \int_0^x |Q_n(t) - f'(t)| dt$ ou $\int_x^0 |Q_n(t) - f'(t)| dt$ selon le signe

de x , quoiqu'il en soit $\forall x \in I, |P_n(x) - f(x)| \leq \int_{-a}^a M(Q_n - f') dt = 2aM(Q_n - f') \rightarrow 0$

Ainsi $N(P_n - f) \leq (2a+1)M(Q_n - f')$, donc (P_n) CV vers f au sens de N

On peut donc affirmer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans (E, N)

Q14. On utilise les résultats de la question 2.

Si $n \neq 0$, $uov(f_n) = u(nW_{n-1}f_n) = nW_{n-1} \frac{2}{\pi} W_n f_n$, or $W_{n-1}W_n = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$ si $n \neq 0$, $uov(f_n) = f_n$

$uov(f_0) = u(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 f_0 = f_0$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, uov(f_n) = f_n$

Q15. $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(x) = \sum_{n=0}^d \alpha_n f_n(x) \Rightarrow uov(P) = \sum_{n=0}^d \alpha_n uov(f_n) = P$

Ainsi la restriction de uov à $\mathbb{R}[X]$ est Id .

On pose $v: (E, N) \rightarrow (E, M)$, $u: (E, M) \rightarrow (E, M)$ et $\varphi = uov: (E, N) \rightarrow (E, M)$

D'après les questions 10 et 8., la fonction φ est continue de (E, N) dans (E, M) .

La fonction Id l'est aussi, or ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}[X]$ qui est dense dans E

Finalement $\forall f \in E, uov(f) = Id(f) = f$.

Q16. $\forall f \in \ker v$ on a $v(f) = 0 \Rightarrow uov(f) = u(0) = 0 = f$

Donc si $\ker v = \{0\}$ alors v est injectif

(j'informe le lecteur attentif que même si $uov = Id$ je ne peux pas dire que v est bijectif car il faudrait pour cela avoir également $vov = Id$)