Partie 1 :

Question 1 : Soit $(A, B) \in S_n^{++}$ et $t \in [0, 1]$ on pose $M = tA + (1-t)B \Rightarrow {}^tM = M$ car $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$

De plus on a $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0, X {}^tMX = t(X {}^tAX) + (1-t)X {}^tBX \geq 0$ car $X {}^tAX > 0$ et $X {}^tBX > 0$

Si $t = 0 \Rightarrow {}^tXMX = {}^tXBX > 0$

Si $t \neq 0 \Rightarrow {}^tXMX = t({}^tXAX) + (1-t){}^tXBX \geq t({}^tXAX) > 0$

Finalement $M \in S_n^{++} \Rightarrow [A, B] \subset S_n^{++}$ qui est bien une partie connexe

Question 2 : On considère l'application $\phi : M \mapsto {}^tMM - I_n$ elle est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

Or $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue

$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n \Rightarrow \|M\| = \sqrt{n}$, ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée

Finalement $M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$

Question 3 : $\text{Conv}(K) = \Phi(H \times K)$, l'application Φ est clairement continue. Montrons que H est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$

L'application $\ell : (x_i)_{i=1}^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et $H = \ell^{-1}(\{1\})$ comme $\{1\}$ est une partie fermée

de $\mathbb{R}$, on peut affirmer que H est une partie fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$

$\forall (\lambda_i)_{i=1}^{n+1} \in H, \max_{i \in [1, n+1]} |\lambda_i| \leq 1$ car $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, H est donc une partie bornée de $\mathbb{R}^{n+1}$

Finalement H est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $H \times K^{n+1}$ est le produit cartésien de parties compactes c'est donc une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$

$\text{Conv}(K)$ est l'image d'une partie compacte par une application continue c'est donc bien une partie compacte de E .

Question 4 : K est une partie compacte de E donc est bornée, $\forall (x, y) \in K, \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M$

Ce qui assure l'existence de $\delta(K) = \sup_{(x, y) \in K^2} \|y - x\|$

Partie 2 :

Question 5 : Si cette suite admet une valeur d'adhérence a alors $\exists \varphi$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers a , ainsi la suite $(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ converge vers 0, ce qui assure l'existence d'un rang N tel que lorsque $p > N, \|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| < \varepsilon$, avec $\varphi(p+1) \neq \varphi(p)$. Ce qui contredit l'hypothèse donnée sur la suite (x_n) . Cette n n'admet donc aucune valeur d'adhérence.

Question 6 : On effectue comme le préconise l'énoncé un raisonnement par récurrence. On suppose donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{i=1}^p \in K^p, K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B_0(x_i, \varepsilon)$.

Ainsi pour tout entier p , il existe $x_{p+1} \in K$ tel que $\forall i \in [1, p], x_{p+1} \notin B_0(x_i, \varepsilon)$

On construit alors une suite $(x_n) \in K^n$ telle que si $n \neq p, \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$

D'après la question 5. Cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui est impossible pour une suite d'une partie compacte.

Finalement $\forall \varepsilon > 0$ tel que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (x_i)_{i=1}^p \in E^p$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B_0(x_i, \varepsilon)$.

Question 7 : On effectue à nouveau un raisonnement par l'absurde. On suppose que $\forall \alpha > 0, \exists x \in K$ tel que $\forall i \in I, B_o(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$. Si on prend $\alpha = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i, B_o\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \Omega_i$. De cette suite on peut extraire une sous suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ vers $a \in K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Il existe donc $j \in I$, tel que $a \in \Omega_j$, qui est un ouvert, il existe donc $r > 0$, tel que $B_o(a, r) \subset \Omega_j$,

Cependant la convergence de $(x_{\varphi(n)})$ vers a , assure que si $n > N$, $x_{\varphi(n)} \in B_o(a, r)$

Comme $\varphi(n) \rightarrow +\infty, \frac{1}{\varphi(n)} \rightarrow 0$ donc si n est suffisamment grand $B_o\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B_o(a, r) \subset \Omega_j$ ce qui est impossible.

Finalement $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in K, \exists i \in I$ tel que $B_o(x, \alpha) \subset \Omega_i$

Question 8 : Utilisons la question 6 $\forall \varepsilon > 0$ tel que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (x_i)_{i=1}^p \in K^p$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B_o(x_i, \varepsilon)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la question 7. nous donne un indice i_j tel que $B_o(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_j}$

On construit ainsi une famille finie d'ouverts Ω_k avec $k = i_j$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ telle K soit inclus dans la réunion finie de cette famille

Question 9. Notons $\forall i \in I, O_i = E \setminus F_i$, c'est une famille d'ouverts de E . On montre alors que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

en effet $\emptyset = \bigcap_{i \in I} (E \setminus O_i) = E \setminus \bigcup_{i \in I} O_i$ et $K \subset E = \bigcup_{i \in I} O_i$.

D'après la question 8. on construit une famille finie d'ouverts telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p O_k \Rightarrow K \cap \left(\bigcap_{k=1}^p F_k \right) = \emptyset \text{ or } F_k \subset K \Rightarrow \bigcap_{k=1}^p F_k = \emptyset$$

Partie 3 :

Question 10 : $\forall x \in E$, l'application $u \mapsto \|u(x)\|$ est continue sur G qui est une partie compacte de $GL(E)$, donc cette application est bornée et $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$ existe, c'est un réel positif

$$N_G(x) = 0 \Rightarrow \forall u \in G, \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \forall u \in G, u(x) = 0 \text{ or } u \text{ est bijectif donc } x = 0$$

$$\forall u \in G, \|u(\lambda x)\| = |\lambda| \|u(x)\| \Rightarrow N_G(\lambda x) = |\lambda| N_G(x)$$

$$\forall u \in G, \|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \Rightarrow N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$$

Finalement N_G définit bien une norme sur E

Question 11 : $\forall v \in G, u \circ v \in G$, donc $\|u \circ v(x)\| \leq \sup_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$

$$N_G(x) \text{ est un majorant de } \left\{ \|u(v(x))\|, u \in G \right\} \Rightarrow N_G(v(x)) \leq N_G(x)$$

$$\text{De même } \|u(x)\| = \|u \circ v^{-1}(v(x))\| \leq \sup_{w \in G} \|w(v(x))\| = N_G(v(x)) \Rightarrow N_G(x) \leq N_G(v(x))$$

$$\text{Finalement } \forall v \in G, N_G(x) = N_G(v(x))$$

Question 12 :

($\Leftarrow$) on suppose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \lambda x$

$$N_G(x+y) = N_G((1+\lambda)x) = |1+\lambda| N_G(x) = (1+\lambda) N_G(x) = N_G(x) + N_G(\lambda x) = N_G(x) + N_G(y)$$

($\Rightarrow$) On suppose que $\forall (x, y) \in E^2, N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$

Nous savons que $\forall z \in E, l'application u \mapsto \|u(z)\|$ est continue sur G qui est une partie compacte de $GL(E)$, donc la borne supérieure est atteinte.

Il existe donc $v \in G$ telle que $N_G(x+y) = \|v(x+y)\| = \|x'+y'\|$ où $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$

D'après la question 11. $N_G(x') = N_G(v(x)) = N_G(x)$ de même pour y' et y

On obtient donc $\|x'+y'\| = N_G(x') + N_G(y') \leq \|x'\| + \|y'\|$

Cependant $\|x'\| = \|Id(x')\| \leq N_G(x')$ et $\|y'\| \leq N_G(y') \Rightarrow \|x'+y'\| = \|x'\| + \|y'\|$

Ce qui en élevant au carré donne le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz. $\langle x', y' \rangle = \|x'\| \times \|y'\|$

Ainsi (x', y') sont liés et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y' = \lambda x'$.

On a $\langle x', y' \rangle = \|x'\| \times \|y'\| \Rightarrow \lambda \|x'\|^2 = |\lambda| \|x'\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y' = \lambda x' \Rightarrow y = v^{-1}(y') = \lambda v^{-1}(x') = \lambda x$

Question 13 : Comme x est dans K qui est stable par u , on a $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, u^i(x) \in K$, or $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$ et

que K est une partie convexe, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) \in K$

$$u(x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^i(x) = \frac{1}{n} u^n(x) + x_n - \frac{1}{n} x \Rightarrow \|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\|$$

$$\text{Or } (u^n(x), x) \in K^2 \Rightarrow \|u^n(x) - x\| \leq \delta(K) \Rightarrow \|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$$

Question 14 : De la suite (x_n) de K , on extrait une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $a \in K$

Or $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\delta(K)}{\varphi(n)} \rightarrow 0$. Par continuité de la fonction $x \mapsto \|u(x) - x\|$ (car u est linéaire dans

un espace de dimension finie) on obtient $\|u(a) - a\| = 0 \Rightarrow u(a) = a$

Question 15 : Soit $x \in K \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket u_i(x) \in K$ or $\sum_{i=1}^r \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(x) \in K$ car K est convexe.

Ainsi K est stable par $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i$. On peut donc appliquer le résultat de la question 14., à savoir l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$

Question 16 : $N_G(u(a)) = N_G(a) = N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right)$

D'après la question 13. $N_G(u_i(a)) = N_G(a) \Rightarrow \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = N_G(a)$

Finalement on a bien $N_G(u(a)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$

Question 17 : Prenons $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$

$$N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + \sum_{i \neq j} N_G(u_i(a))$$

Nous avons cependant $N_G(u(a)) = N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) \Rightarrow N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$

Donc $N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{i \neq j} u_i(a)\right)$

Question 18 : D'après la question 12., il existe $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{i \neq j} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$

On obtient donc $ru(a) = \sum_{i=1}^r u_i(a) = (\lambda_j + 1)u_j(a) \Rightarrow u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$

Question 19 : On suppose qu'il existe $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $u_j(a) \neq a$

Or on a $u(a) = a = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$, notons $\mu = \frac{\lambda_j + 1}{r} \Rightarrow u_j(a) = \mu a$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_j^n(a) = \mu^n a$

Si $\mu > 1$: $(u_j^n(a))$ est une suite de K (car stable par u) qui admet donc une sous suite convergente ce qui est impossible car $\|u_j^n(a)\| \rightarrow +\infty$

Si $\mu < 1$: alors $u_j^{-1}(a) = \frac{1}{\mu} a$ et on arrive à la même impossibilité que dans le cas précédent en considérant la suite $\left((u_j^{-1})^n(a)\right)$

Finalement $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_i(a) = a$

Question 20 : Pour tout $u \in G$, je note $F_u = \{a \in K \text{ tel que } u(a) = a\}$

$x \mapsto u(x) - x$ est linéaire en dimension finie donc continue sur E , ainsi $F_u = (u - Id)^{-1}(\{0\})$, ainsi F_u est une partie fermée de K

On suppose par l'absurde que $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$, d'après la question 9. il existe un entier r et une famille

$(u_i)_{i=1}^r \in G^r$ tels que $\bigcap_{i=1}^r F_{u_i} = \emptyset$, ce qui est contradictoire avec la question 19.

Donc $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$, ce qui prouve l'existence de $a \in \bigcap_{u \in G} F_u \Rightarrow \forall u \in G, u(a) = a$

Partie 4 :

Question 21 : Comme G est compacte, G est aussi fermée, $\forall A \in G, \exists (A_n) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n \rightarrow A$. On a

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \rho_{A_n}(M) = {}^t A_n M A_n \rightarrow {}^t A M A = \rho_A(M)$

Donc l'application $A \mapsto \rho_A$ est continue sur G

Question 22 : $\rho_A(M + \lambda R) = {}^t A(M + \lambda R)A = {}^t A M A + \lambda {}^t A R A = \rho_A(M) + \lambda \rho_A(R)$ donc ρ_A est linéaire

Puisque $A \in G$ alors A^{-1} existe or $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}}(M) = {}^t A ({}^t A^{-1} M A^{-1}) A = M = Id(M) \Rightarrow \rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = Id$

De même on prouve que $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = Id$. On peut affirmer que ρ_A est bijective et que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$

Soit $H = \{\rho_A \text{ tel que } A \in G\} \subset GL(M_n(\mathbb{R}))$

$Id \in G$ et $\rho_{Id} = Id \Rightarrow H \neq \emptyset$

$\forall (A, B) \in G^2, \rho_{AB^{-1}}(M) = {}^t (AB^{-1})M(AB) = {}^t B^{-1}({}^t A M A)B = \rho_{B^{-1}} \circ \rho_A(M)$ or $AB^{-1} \in G \Rightarrow \rho_{B^{-1}} \circ \rho_A \in H$

Finalement $(H, \circ)$ est une sous groupe de $(GL(M_n(\mathbb{R})), \circ)$

H est l'image de G (partie compacte) par une application continue donc H est une partie compacte

Question 23 : Soit $M \in \Delta \Rightarrow \exists A \in G$ telle que $M = {}^tAA \Rightarrow {}^tM = M \in S_n$

$\forall X \in \square^n, X \neq 0, {}^tXMX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geq 0$ et ${}^tXMX = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ car A est inversible

Finalemnt $\Delta \subset S_n^{++}$

Soit $\gamma : A \mapsto {}^tAA$ cette application est continue et $\Delta = \gamma(G)$ comme G est compacte alors Δ l'est aussi

Question 24 : D'après la question 3. K est une partie compacte comme enveloppe convexe d'une partie compacte. Il reste à prouve que K est stable par tous les éléments de H (K est aussi convexe en tant qu'enveloppe convexe)

Montrons que $\forall M \in K, \forall \rho_A \in H$ où $A \in G$, on a $\rho_A(M) \in K$. Puisque $M \in K$, il existe $n^2 + 1$ matrices

$B_i \in \Delta$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$

Par linéarité $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$ or $B_i = {}^tC_i C_i \Rightarrow \rho_A(B_i) = {}^tA {}^tC_i C_i A = {}^t(C_i A) C_i A \in \Delta$ car $C_i A \in G$

Finalemnt $\rho_A(M) \in \text{Conv}(\Delta) = H$

K est une partie compacte convexe de S_n^{++} stable par tout éléments de H

Question 25 : On applique le résultat de la question 20. (le théorème de Markov). Ainsi il existe un élément de K que nous noterons M tel que tout élément u de H on ait $u(M) = M$ et donc pout toute matrice A de G on a $\rho_A(M) = M$