Corrigé du DS5

Problème :

Question 1 : Soit $\sum x_n$ convergente, on pose $S_n = \sum_{p=0}^n x_p$, alors la suite (S_n) converge vers S , comme le reste de la série convergente $R_n = S - S_n$, alors (R_n) converge vers 0

Question 2 : La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Question 3 : On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, f est décroissante et

positive : on a : $\int_p^{p+1} f(t) dt \leq f(p) \leq \int_{p-1}^p f(t) dt$ or f est intégrable sur $[1, +\infty[$

Donc en sommant on obtient : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq H_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$

Or $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left[-\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Donc $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Par le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} R_n = \frac{1}{\alpha-1}$

Donc : $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Question 4 : La série de terme général R_n converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

Question 5 : La suite $|u_n| = \frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère spécial des séries

alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est donc convergente, ce qui assure l'existence de $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, et on

aura : $|R_n| \leq u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Question 6 : On utilise le résultat suivant $\frac{1}{p} = \int_0^1 x^{p-1} dx$

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^q \frac{(-1)^p}{p} &= - \int_0^1 \sum_{p=n+1}^q (-1)^{p-1} x^{p-1} dx = - \int_0^1 \frac{(-x)^n [1 - (-x)^{q-n}]}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left| (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^q dx = \frac{1}{q+1} \rightarrow 0$$

$$\text{Finalement : } R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Question 7 : On intègre par parties en intégrant x^{n-1} et en dérivant $\frac{x}{1+x}$

$$R_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^n}{n} \frac{x}{1+x} \right]_0^1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{Or } \left| \frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{Ainsi : } R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Question 8 : La série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ est convergente par le CSSA, et par critère de comparaison, comme $\sum \frac{1}{n^2} CV \Rightarrow \sum O\left(\frac{1}{n^2}\right) CV$

Finalement R_n est la somme de deux séries convergentes $\Rightarrow \sum R_n CV$

$$\sum_{p=0}^n R_p = \sum_{p=0}^n (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^p}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{\sum_{p=0}^n (-x)^p}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{Or } \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \right| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \rightarrow 0$$

$$\text{Donc : } \sum_{n=0}^{\infty} R_n = - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Question 9 : On pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ alors $|w_n| = \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum w_n$ CVA sur $\mathbb{R}$ donc CV. Ce qui assure l'existence de R_n en tant que reste d'une série convergente

Question 10 : La convergence absolue assure la sommabilité de la famille (w_n) , j'applique le théorème de sommation par paquets

On considère $\{p \in \mathbb{N}, p \geq 2n+2\} = \{2k+2 \text{ tel } k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \cup \{2k+3 \text{ tel } k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$

$$\text{Ainsi } R_{2n+1} = \sum_{p=2n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+3)^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2k+2)^2} - \frac{1}{(2k+3)^2} \right]$$

$$\text{Or } \frac{1}{(2k+2)^2} - \frac{1}{(2k+3)^2} = \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \text{ d'où le résultat } R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}$$

Question 11 : On joue avec les majorations et les minorations

$$\text{On a } \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \leq \frac{4k+6}{(2k+2)^2(2k+3)^2} = \frac{2}{(2k+2)^2(2k+3)} \leq \frac{2}{(2k+2)^3} = \frac{1}{4(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$$

$$\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \geq \frac{4k+4}{(2k+2)^2(2k+3)^2} = \frac{1}{(2k+3)^2(k+1)} \geq \frac{1}{(2k+4)^2(k+2)} = \frac{1}{4(k+2)^3} \geq \int_{k+2}^{k+3} \frac{1}{4t^3} dt$$

$$\text{Finalement } \int_{k+2}^{k+3} \frac{1}{4t^3} dt \leq \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$$

Question 12 : La fonction $t \mapsto \frac{1}{4t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\text{Donc } \int_{n+2}^{+\infty} \frac{1}{4t^3} dt \leq R_{2n+1} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{4t^3} dt \text{ donc } \frac{1}{8(n+2)^2} \leq R_{2n+1} \leq \frac{1}{8n^2}$$

$$\text{Question 13 : On obtient immédiatement } \frac{(2n+1)^2}{8(n+2)^2} \leq (2n+1)^2 R_{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{8n^2}$$

$$\text{Par le théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)^2 R_{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$R_{2n} = R_{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow (2n)^2 R_{2n} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} [(2n+1)^2 R_{2n+1} - 1]$$

$$\text{Finalement } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^2 R_{2n} = -\frac{1}{2}$$

Question 14 : De la question précédente, on peut affirmer que $R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ donc $J_n \sim \frac{-1}{2n^2}$

Ceci assure la convergence absolue et donc la convergence de la série de terme général J_n