Correction des exercices du DS5

Exo 1 :

La fonction $t \mapsto \frac{1}{lnt}$ *est continue et même* C^1 *sur* $[2, x]$, *l'intégrale existe, et je peux effectuer une intégration par parties sur ce segment*

On a $\int_2^x \frac{dt}{lnt} = \left[\frac{t}{lnt}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{(lnt)^2}$ *or* $\frac{1}{(lnt)^2} = o\left(\frac{1}{lnt}\right)$ *au voisinage de l'infini*

Or $\frac{1}{lnt} \geq \frac{1}{t}$ *donc* $t \mapsto \frac{1}{lnt}$ *n'est pas intégrable sur* $[2, +\infty[$. *En utilisant la relation de négligeabilité sur les intégrales divergentes, je peux affirmer que* $\int_2^x \frac{dt}{(lnt)^2} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{lnt}\right)$

Finalement $\int_2^x \frac{dt}{lnt} \sim \frac{x}{lnx}$ *lorsque x est au voisinage de l'infini*

Exo 2 :

1. *On considère la fonction* $\varphi: g \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ *définie sur E à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Cette fonction est continue car linéaire et* $|\varphi(g)| \leq \|f\|\|g\|$. *Tout polynôme est combinaison linéaire des* $(t^n, n \in \mathbb{N})$, *donc pour tout polynôme P on a* $\varphi(P) = 0$. *La fonction* φ *et la fonction nulle sont continues et coïncident sur une partie dense de E, elles sont donc égales sur E*
   Ainsi $\forall g \in E, \varphi(g) = 0$, *en particulier* $\varphi(f) = \|f\|^2 = 0 \Longrightarrow f = 0$
2. *On pose* $u_k(t) = t^k e^{-zt}$, *alors* $|u_k(t)| = t^k e^{-Re(z)t}$, *comme* $Re(z) > 0$, *on peut affirmer que la limite de* $u_k(t)$ *à l'infini est nulle*
3. *La fonction* u_n *est continue sur* $[0, +\infty[$, *or* $\lim\limits_{t \to +\infty} u_{n+2}(t) = 0$, *on a* $|u_n(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, *or* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$, *donc* u_n *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *et continue sur* $[0,1]$, *finalement elle est intégrable sur* $[0, +\infty[$
4. *Nous avons* $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-t^{n+1}e^{-zt}}{z} = 0$, *je peux donc effectuer une intégration par parties*
   Ainsi $I_{n+1} = \left[\frac{-t^{n+1}e^{-zt}}{z}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{z}\int_0^{+\infty} t^n e^{zt}dt \Longrightarrow I_{n+1} = \frac{n+1}{z} I_n$
   Par une récurrence immédiate on obtient $I_n = \frac{n!}{z^n} I_0$ *or* $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{zt}dt = \frac{1}{z} \Longrightarrow I_n = \frac{n!}{z^{n+1}}$
5. *Si on note* $\gamma: t \mapsto t^n f(t)$, *cette fonction est continue sur* $[0, +\infty[$ *et* $|\gamma(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, *ce qui garantit (comme à la question 3) l'intégrabilité de* γ *sur* $[0, +\infty[$
   Alors $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = \int_0^{+\infty} u^{4n} sin(u) e^{-u} 4u^3 du$ *(on pose* $t = u^4$ *)*
   Donc $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 4Im\left(\int_0^{+\infty} u^{4n+3} e^{-(1-i)u} du\right)$ *on reconnait l'expression de* I_{4n+3} *avec un complexe* $z = 1 - i$ *où* $Re(z) > 0$
   Finalement $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 4Im\left(\frac{(4n+3)!}{(1-i)^{4n+4}}\right)$ *cependant* $(1-i)^{4n+4} = (-4)^{n+1} \in \mathbb{R}$
   Donc $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0$

On vient de trouver une fonction non nulle vérifiant $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0$, *ce qui montre que le résultat de la première question n'est valable que lorsqu'on intègre sur un segment*