

### Partie 1 :

Question 1 : On effectue une intégration par parties, on obtient  $I_p = (p-1)I_{p-2} - (p-1)I_p$

Soit  $I_p = \frac{p-1}{p} I_{p-2}$ . On considère alors les indices pairs et impairs.

On trouve  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$  et  $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$

On calcule  $I_{2p} I_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)} \sim \frac{\pi}{4p}$ , de plus  $I_{p-2} \geq I_{p-1} \geq I_p \Rightarrow \frac{p}{p-1} \geq \frac{I_{p-1}}{I_p} \geq 1$

Par le théorème des gendarmes  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{p-1}}{I_p} = 1 \Rightarrow I_p \sim I_{p-1}$  donc  $I_{2p} \sim I_{2p+1}$

On peut donc affirmer que  $(I_{2p})^2 \sim \frac{\pi}{4p} \Rightarrow I_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}}$

Finalement :  $I_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

Question 2 : on a immédiatement  $\rho_n(x) = a_n \left( \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^{2n}$

La condition  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt = 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \int_0^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt \text{ (par parité)} = 4I_{2n} \text{ (en posant } t = 2u)$$

Il est nécessaire donc que  $a_n = \frac{2\pi}{4I_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$

Les  $a_n$  sont bien des réels positifs, donc  $\rho_n(x) \geq 0$

Soit  $\alpha \in ]0, \pi[$ ,  $\int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt = \int_{-\pi}^{-\alpha} \rho_n(t) dt$  (par parité)

or  $t \rightarrow \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right)$  est décroissante sur  $[\alpha, \pi]$ , donc  $0 \leq a_n \int_{\alpha}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt \leq a_n \pi \cos^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \omega_n$

En utilisant l'équivalent de  $I_{2n}$  et  $a_n = \frac{\pi}{2I_{2n}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4n} = \sqrt{\pi n}$

$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \sim \frac{\sqrt{\pi(n+1)}}{\sqrt{\pi n}} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1$ , par la règle de d'Alembert  $\sum \omega_n$  converge donc  $\omega_n \rightarrow 0$ .

On en déduit donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt = 0$  et que  $\rho_n$  est une unité approchée de  $C_{2\pi}$

### Partie 2

Question 3 :  $f$  est continue sur  $[-\pi, \pi]$  qui est une partie compacte donc  $f$  y est uniformément continue d'après le théorème de Heine

Question 4 : sachant que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt = 1$  on peut écrire  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \rho_n(t) dt$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(f * \rho_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \rho_n(t) dt$

On utilise alors la continuité uniforme de  $f$

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha \in ]0, \pi[$  tq si  $|(x-t) - x| = |t| < \alpha$  alors  $|f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Ensuite  $\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} 2 \|f\|_{\infty} \int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt$  où  $\|f\|_{\infty} = \sup_{y \in [-\pi, \pi]} |f(y)|$

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt = 0$ ,  $\exists N$  tq si  $n > N$ ,  $\int_{\alpha}^{\pi} \rho_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4\pi \|f\|_{\infty}}$

Ainsi  $\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Et pour les mêmes raisons  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\alpha} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Finalelement :  $\forall x \in \mathbb{R}, |(f * \rho_n)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Donc  $\|(f * \rho_n) - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , et la suite  $(f * \rho_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$

### **Partie 3 :**

Question 5 :  $F_0 = D_0 = e_0 \Rightarrow c_0(F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1$

De même  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$  donc  $c_0(F_n) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$

$$D_n(t) = e^{int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} = e^{int} \frac{e^{-(n+1/2)it} - 2i \sin((n+1/2)t)}{e^{-it} - 2i \sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

$$F_n(t) = \frac{1}{(n+1) \sin(t/2)} \sum_{p=0}^n \sin((p+1/2)t)$$

$$\text{or } \sum_{p=0}^n \sin((p+1/2)t) = \text{Im} \left( \sum_{p=0}^n e^{i(p+1/2)t} \right) = \text{Im} \left( e^{i(t/2)} \sum_{p=0}^n e^{ipt} \right) = \text{Im} \left( e^{i(t/2)} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right)$$

$$\sum_{p=0}^n \sin((p+1/2)t) = \text{Im} \left( e^{i(t/2)} \frac{e^{i(n+1)t/2} - e^{-i(n+1)t/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \right) = \frac{(\sin((n+1)t/2))^2}{\sin(t/2)}$$

$$\text{Finalelement : } F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2$$

$$\text{Question 6 : On a } (f * e_p)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} -f(u) e^{ip(x-u)} du \quad (u = x-t)$$

$$(f * e_p)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) e^{ip(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) e^{ip(x-u)} du \quad (\text{car } 2\pi - \text{périodoque})$$

$$\text{Finalelement : } (f * e_p)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ipt} dt e^{ipx} = c_p(f) e_p(x)$$

$$\text{Par linéarité de l'intégrale on obtient : } (f * D_n)(x) = \sum_{p=-n}^n c_p(f) e_p(x) = S_n(f)(x)$$

$$\text{De plus : } C_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n S_p(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n f * D_p = f * \left( \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n D_p \right) = f * F_n$$

$$\text{Question 7 : D'après la question 5, } F_n \geq 0 \text{ et } c_0(F_n) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$$

$$\text{La fonction } F_n \text{ est paire donc } \int_{-\pi}^{-\alpha} F_n(t) dt = \int_{\alpha}^{\pi} F_n(t) dt$$

$$\text{La fonction } t \rightarrow \sin^2(t/2) \text{ est croissante sur } [\alpha, \pi] \text{ donc } \frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$$

$$\text{On en déduit que } 0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_{\alpha}^{\pi} F_n(t) dt \leq \frac{1}{n+1} \frac{\pi - \alpha}{\sin^2(\alpha/2)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

On a bien démontré que la suite  $(F_n)$  est une unité approchée de  $C_{2\pi}$

**Question 8 :** Comme  $f$  est dans  $C_{2\pi}$  et que  $(F_n)$  est une unité approchée de  $C_{2\pi}$ , d'après la question 4, on en déduit que la suite  $(f * F_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Or d'après la question 6,  $f * F_n = C_n(f)$ , donc la suite  $(C_n(f))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### **Partie 4 :**

**Question 9 :** Par linéarité du calcul intégral,  $c_n(f + \lambda g) = c_n(f) + \lambda c_n(g)$

donc  $\mu_n(f + \lambda g) = \mu_n(f) + \lambda \mu_n(g)$ .  $\mu_n$  est bien linéaire à valeur dans le corps des complexes, donc  $c$  est une forme linéaire

**Question 10 :**  $\forall f \in C_{2\pi}$ ,  $|\mu_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 - t) D_n(t)| dt$

Cependant  $\forall t \in [-\pi, \pi]$ ,  $|f(x_0 - t)| \leq N_{\infty}(f)$

D'où  $\forall f \in C_{2\pi}$ ,  $|\mu_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} N_{\infty}(f) \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = L_n N_{\infty}(f)$

Cette inégalité prouve la continuité de  $\mu_n$  et que  $\|\mu_n\| \leq L_n$

**Question 11 :** On a :

$$\mu_n(f_{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon}(x_0 - t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f_{\varepsilon}(u) D_n(x_0 - u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon}(t) D_n(x_0 - t) dt$$

$$\text{Soit encore : } \mu_n(f_{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(g_0(t))^2}{|g_0(t)| + \varepsilon} dt$$

On utilise l'astuce :  $a^2 \geq a^2 - \varepsilon = (|a| + \varepsilon)(|a| - \varepsilon) \Rightarrow \frac{a^2}{|a| + \varepsilon} \geq |a| - \varepsilon$

$$\text{Ainsi : } \frac{(g_0(t))^2}{|g_0(t)| + \varepsilon} \geq |g_0(t)| - \varepsilon \Rightarrow \mu_n(f_{\varepsilon}) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_0(t)| - \varepsilon dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_0(t)| dt - \varepsilon$$

$$\text{Question 12 : On observe que } \int_{-\pi}^{\pi} |g_0(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x_0 - t)| dt = \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} |D_n(u)| du = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

L'inégalité de la question 11 donne  $\mu_n(f_{\varepsilon}) \geq L_n - \varepsilon$ , de plus on a  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $N_{\infty}(f_{\varepsilon}) \leq 1$

On obtient donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $L_n - \varepsilon \leq \mu_n(f_{\varepsilon}) \leq L_n$ , donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_n(f_{\varepsilon}) = L_n \leq \|\mu_n\|$

Avec l'inégalité déjà obtenue à la question 10, on aura  $L_n = \|\mu_n\|$

**Question 13 :** la fonction  $t \rightarrow |D_n(t)|$  est paire donc

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{\sin(t/2)} dt \quad \text{car } \sin(t/2) \geq 0 \text{ sur } [0, \pi]$$

$$\text{De plus } \sin(t/2) \leq t/2, \text{ soit } L_n \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t} dt$$

On effectue le changement de variable  $u = (n+1/2)t$

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t} dt = \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} du$$

$$\text{Ensuite : } \int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)\pi} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} |\sin u| du \quad \text{or} \quad \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} |\sin u| du = 2$$

*Finalemment* : 
$$L_n \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

Question 14 : en utilisant la décroissance de la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{t}$  sur  $[1, +\infty]$  , on montre que

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \geq \sum_{p=1}^n \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \quad \text{d'où} \quad L_n \geq \frac{4}{\pi^2} \ln(n+1)$$

Question 15 : On en déduit immédiatement avec la question 14 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n\| = +\infty$