

Exercice n°1 :

$$\text{On pose } w_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $|w_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ comme $2 > 1$ le critère d'équivalencesur les séries à termes positifs assure la convergence absolue donc la convergence de la série $\sum w_n$ et donc la convergence de la suite (u_n) .

$$\text{Ainsi } \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

On a ensuite $v_n \sim \frac{1}{2n^3}$ donc la série $\sum v_n$ est convergente par les mêmes critères que pour la question précédente. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{p=1}^n v_p$

$$\text{On a par décomposition en éléments simples } v_p = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{4}{2p+1}$$

$$\text{Donc } S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} - 4 \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+1} = 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{n+1} - 4 \left[\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} - 1 + \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$\text{En utilisant la première question } S_n = 2\ln n + 2\gamma - 1 - 4 \left[\ln 2n + \gamma - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \gamma - 1 \right] + o(1)$$

$$\text{Donc } S_n = 3 + 4\ln\left(\frac{n}{2n}\right) + o(1) = 3 - 4\ln 2 + o(1)$$

Finalement la somme de la série demandée est $3 - 4\ln 2$

Exercice n°2 :

Si on a $u_n = o(1)$ alors $2^n u_n = o(2^n)$ or $\sum 2^n$ est divergente, d'après les relations de négligeabilité sur les séries divergentes, $\sum_{k=0}^n 2^k u_k = o(\sum_{k=0}^n 2^k) = o(2^{n+1}) \Rightarrow v_n = o(1)$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{p+k=n} \frac{u_k}{2^p}$ c'est le terme général du produit de Cauchy des séries

$\sum u_n$ et $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui convergent toutes les deux absolument, donc $\sum v_n$ CVA

$$\text{De plus } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$