Question 1 :

$L_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$, *donc* L_α *est la somme d'une série entière, déterminons son rayon de convergence*

Soit $a_n=\frac{1}{n^\alpha}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\to 1$. *D'après la règle de d'Alembert spécifique aux séries entières le rayon de convergence est* $R=\frac{1}{1}=1$. *La somme d'une série entière est de classe* C^∞ *sur son disque ouvert de convergence . Donc* L_α *est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$.

Question 2 :

$L_\alpha(x)+L_\alpha(-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n^\alpha}$, *la convergence absolue de* $\sum\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n^\alpha}$ *implique la sommabilité de la famille, d'après le théorème de sommation par paquets je peux séparer les termes pairs et impairs*

$$L_\alpha(x)+L_\alpha(-x)=\sum_{p=1}^{+\infty}2\frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha}=2^{1-\alpha}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^p}{p^\alpha}=2^{1-\alpha}L_\alpha\left(x^2\right)$$

Question 3 :

L_α *est de classe* C^1 *sur* $]-1,1[$ *et* $L'_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{x^{n-1}}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}}\Rightarrow xL'_{\alpha+1}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}=L_\alpha(x)$

Question 4 :

Si $\alpha=0,\ L_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

Si $\alpha=-1,\ L_{-1}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$

Si $\alpha=1,\ L_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

Question 5 :

$\alpha\le 1$, *pour tout* $x\in[0,1[$, $L_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n^\alpha}=S_N(x)$. *Or* $\lim_{x\to 1}S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$

Sur $[0,1[$, $L'_\alpha(x)\ge 0$, *donc* L_α *est croissante sur* $[0,1[$, *cette fonction admet donc une limite* ℓ *en 1 qui sera éventuellement infinie. Alors* $\ell\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$, *comme* $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ *est divergente car* $\alpha\le 1$, *on aura* $\lim_{x\to 1}L_\alpha(x)=+\infty$

Question 6 :

$\alpha>1$, *nous sommes assuré de la continuité de* L_α *sur* $]-1,1[$.

Posons $u_n(x)=\frac{x^n}{n^\alpha}$, u_n *est continue sur* $[-1,1]$ *et* $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]}\le\frac{1}{n^\alpha}$. *Comme* $\alpha>1$, $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente, donc* $\sum u_n$ *CVN donc CVU sur* $[-1,1]$. *Le théorème de continuité assure que* L_α *est continue sur* $[-1,1]$

Question 7 :

D'après la question 3 : $xL'_2(x) = L_1(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} L'_2(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)\right) = +\infty$

Question 8 :

$\varphi : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$

Au voisinage de 0, $e^u - 1 = u + o(u)$ *alors* $\varphi(u) \underset{0}{\sim} u^{\alpha-2} = \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$*,* $2-\alpha < 1$ *donc* φ *est intégrable sur* $]0,1]$

De plus $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ *or* $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* φ *l'est aussi*

Finalement φ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$.

Question 9 :

Pour tout réel $x \le 1$*, on pose* $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,\mathrm{d}u$.

On considère $\gamma : (x,u) \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ *sur* $]-\infty,1] \times]0,+\infty[$

$\forall u \in]0,+\infty[: x \mapsto \gamma(x,u)$ *est continue sur* $]-\infty,1]$

$\forall x \in]-\infty,1] : u \mapsto \gamma(x,u)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$

$\forall (x,u) \in]-\infty,1] \times]0,+\infty[,\ |\gamma(x,u)| \le \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} = \varphi(u)$*, or* φ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$. *Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral* K_α *est définie et continue sur* $]-\infty,1]$.

Question 10 :

On suppose maintenant que $\alpha > 2$.

$\forall u \in]0,+\infty[: x \mapsto \gamma(x,u)$ *est de classe* C^1 *sur* $]-\infty,1]$ *et* $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}(x,u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$

$\forall x \in]-\infty,1] : u \mapsto \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}(x,u)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$

$\forall (x,u) \in]-\infty,1] \times]0,+\infty[,\ |\gamma(x,u)| \le \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} = \phi(u)$. *Au voisinage de 0,* $(e^u - 1)^2 = u^2 + o(u^2)$ *alors*

$\phi(u) \underset{0}{\sim} u^{\alpha-3} = \dfrac{1}{u^{3-\alpha}}$*,* $3-\alpha < 1$ *donc* ϕ *est intégrable sur* $]0,1]$. *De plus* $\phi(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ *or* $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* ϕ *l'est aussi. Finalement* ϕ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$. *Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral* K_α *est classe* C^1 *sur* $]-\infty,1]$.

Question 11 :

On suppose maintenant que $\alpha > 1$.

Les hypothèses de la question 10 restent vérifiées, cependant la dominante ϕ *n'est pas intégrable sur* $]0,+\infty[$. *On se place donc sur toute partie compacte* $[a,b] \subset]-\infty,1[$

$\forall (x,u)\in K\times]0,+\infty[\,,\ |\gamma(x,u)|\le \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u-b)^2}=\beta(u)$. β *est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur* $]0,1]$ *et négligeable devant* $u\mapsto \dfrac{1}{u^2}$ *donc intégrable sur* $[1,+\infty[$. *Finalement* β *est intégrable sur* $]0,+\infty[$. *Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral* K_α *est classe* C^1 *sur toute partie compacte de* $]-\infty,1[$ *donc sur* $]-\infty,1[$.

Question 12.

$t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$, *équivalente en 0 à* $t\mapsto \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ *qui est intégrable sur* $]0,1]$ *car* $1-\alpha<1$ *et négligeable à l'infini devant* $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *qui est intégrable sur* $[1,+\infty[$.

Donc $t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$ *et* $G_\alpha=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente*

$t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ *est positive sur* $]0,+\infty[$ *donc* $G_\alpha\ge 0$

Si $G_\alpha=0\Rightarrow \forall t\in]0,+\infty[\,,\ t^{\alpha-1}e^{-t}=0$ *ce qui est impossible. Finalement* $G_\alpha>0$

Question 13 .

Calculons $xK_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{xu^{\alpha-1}}{e^u-x}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-u}u^{\alpha-1}}{1-xe^{-u}}\mathrm{d}u$, *or* $x\in[-1,1]$ *et* $u>0\Rightarrow |xe^{-u}|\le e^{-u}<1$

On pose alors $g_k(u)=u^{\alpha-1}x^k e^{-ku}$, $\forall u>0$ *et* $\forall k\in \mathbb{N}^*$

g_k *est continue sur* $]0,+\infty[$, *intégrable sur* $]0,+\infty[$ *(toujours car équivalente en 0 à* $u\mapsto \dfrac{x^k}{u^{1-\alpha}}$ *qui est intégrable sur* $]0,1]$ *car* $1-\alpha<1$ *et négligeable à l'infini devant* $u\mapsto\dfrac{1}{u^2}$ *qui est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *)*

$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)=\dfrac{xe^{-u}u^{\alpha-1}}{1-xe^{-u}}$, *donc la série* $\sum g_k$ *CVS vers* $u\mapsto \dfrac{xe^{-u}u^{\alpha-1}}{1-xe^{-u}}$ *qui est continue sur* $]0,+\infty[$

$N_1(g_k)=|x|^k\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-ku}\mathrm{d}u$, *on pose* $t=ku$ *et* $N_1(g_k)=|x|^k\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{t}{k}\right)^{\alpha-1}e^{-t}\,\dfrac{\mathrm{d}t}{k}$

$N_1(g_k)=|x|^k\dfrac{1}{k^\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t=G_\alpha\dfrac{|x|^k}{k^\alpha}$ *or* $\sum\dfrac{|x|^k}{k^\alpha}$ *est convergente vers* $L_\alpha(|x|)$

D'après le théorème d'intégration termes à termes $xK_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}g_k(u)\mathrm{d}u=G_\alpha L_\alpha(x)$

Remarque :

On posera alors pour tout $x\in]-\infty,1]$, $L_\alpha(x)=\dfrac{x}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}\mathrm{d}u=\dfrac{x}{G_\alpha}K_\alpha(x)$, *et on admettra que l'application* L_α *ainsi définie et continue sur* $]-\infty,1]$ *et de classe* C^1 *sur* $]-\infty,1[$. *Ceci est assez évident car au vue de l'égalité démontrée à la question 13. et les propriété de la fonction* K_α

Question 14.

On pose $u=-\ln t$, $L_\alpha(x)=\dfrac{x}{G_\alpha}\int_1^0\dfrac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{\frac{1}{t}-x}\left(-\dfrac{\mathrm{d}t}{t}\right)=\dfrac{x}{G_\alpha}\int_0^1\dfrac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1-tx}\mathrm{d}t$

Question 15.

$\sum \frac{1}{n^2}$ *CVA* $\Rightarrow \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ *et* $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *sont sommables. On utilise alors le théorème de sommation par paquets en séparant dans les sommes les termes pairs et impairs, ainsi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \quad et \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$L_2(-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$$

Question 16.

La fonction est C^1 *sur* $]0,1[$ *et* $\Phi'(x)=L'_2(x)-L'_2(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$

Or $L'_2(x)=\frac{L_1(x)}{x}=\frac{-\ln(1-x)}{x}$ *et* $L'_2(1-x)=\frac{-\ln(x)}{1-x}\Rightarrow\Phi'(x)=0$ *donc la fonction est constante*

D'après la question 6 la fonction L_2 *est continue en 1 et en 0 et* $\ln x\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-x\ln x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\Phi(x)=L_2(0)+L_2(1)=L_2(1)=\frac{\pi^2}{6},\ ainsi\ \forall x\in\,]0,1[,\ \Phi(x)=\frac{\pi^2}{6}$$

Question 17.

On prend $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=2L_2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow L_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln 2)^2}{2}$

Question 18.

Une étude de la décroissance de la fonction $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ *prouve que si* $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ *alors* $\frac{x}{x-1}\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

On peut donc bien définir $\forall x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right],\ \Delta(x)=L_2(x)+L_2\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$

Δ *est continue sur* $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ *et de classe* C^1 *sur* $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ *(question 1 et 6)*

$$\forall x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[,\ \Delta'(x)=L'_2(x)-\frac{1}{(x-1)^2}L'_2\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Or $L'_2(x)=\frac{L_1(x)}{x}=\frac{-\ln(1-x)}{x}$ *et* $L'_2\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1}}$

$$\forall x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[,\ \Delta'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}\frac{-\ln\left(1-\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1}}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

$$\forall x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[,\ \Delta'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln\left(\frac{-1}{x-1}\right)}{x(x-1)}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-\ln(1-x)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}\right]=0$$

Cette fonction Δ *est donc constante sur* $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ *est continue sur* $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

Finalement $\forall x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right],\ \Delta(x)=\Delta(0)=0 \Rightarrow \forall x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right],\ L_2(x)+L_2\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$

<u>*Question 19.*</u>

D'après la question 13. $K_2(1)=\int_0^{+\infty}\frac{u}{e^u-1}\mathrm{d}u=G_2L_2(1)=L_2(1)=\frac{\pi^2}{6}$

(je rappelle que $\forall n\in\mathbb{N},\ G_{n+1}=n!\Rightarrow G_2=1$ *)*

<u>*Question 20.*</u>

$\forall x<0,\quad L_2(x)=-\frac{x}{G_2}\int_0^1\frac{\ln(s)}{1-xs}\mathrm{d}s=-x\int_0^1\frac{\ln(s)}{1-xs}\mathrm{d}s$ *on pose alors* $s=\frac{t}{x}$

$$L_2(x)=-x\int_0^x\frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\frac{1}{x}\mathrm{d}t=\int_x^0\frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon\in[x,0[$, $\int_x^\varepsilon\frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\mathrm{d}t=\left[\left(-\ln(1-t)\right)\ln\left(\frac{t}{x}\right)\right]_x^\varepsilon+\int_x^\varepsilon\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ *or* $\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)\ln(1-\varepsilon)=0$

Donc $L_2(x)=\int_x^0\frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\mathrm{d}t=\int_x^0\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$

<u>*Question 21.*</u>

$$g(x)=\int_x^0\frac{\ln(1-t)}{t-1}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(1-t)\right)^2\right]_x^0=-\frac{1}{2}\ln^2(1-x)$$

<u>*Question 22.*</u>

$\sigma: t\mapsto\frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ *est continue sur* $]-\infty,0[$*, elle est équivalente 1 en 0 donc prolongeable par continuité en 0, ainsi elle est intégrable sur* $[-1,0[$*, de plus* $(-t)^{\frac{3}{2}}\sigma(t)\underset{-\infty}{\to}0$ *donc elle est négligeable devant* $t\mapsto\frac{1}{(-t)^{\frac{3}{2}}}$ *donc intégrable sur* $]-\infty,-1]$

Finalement $A=\int_{-\infty}^0\frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\mathrm{d}t$ *est convergente*

<u>*Question 23.*</u>

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ *et* $L_2(x)-g(x)=-\int_x^0\frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\mathrm{d}t\underset{x\to-\infty}{\to}-A\in\mathbb{R}$

Ainsi $L_2(x)-g(x)=o\left(g(x)\right)\Leftrightarrow L_2(x)\underset{-\infty}{\sim}g(x)$

En conclusion $L_2(x)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{\ln^2(-x)}{2}$