Préliminaires :

Les vecteurs propres d'une matrice diagonale sont les vecteurs de la base canonique
Le polynôme caractéristique de T sera $\prod_{i=1}^{n}(x-t_{ii})$*, il est donc scindé à racines simples, donc une matrice triangulaire supérieure a coefficients diagonaux 2 à 2 distincts est diagonalisable*

Partie1 :
Q1 : Si A est diagonalisable on aura $(D,N)=(A,0)$ *comme décomposition de Dunford de A*

Q2 : Si A est nilpotente on aura $(D,N)=(0,A)$ *comme décomposition de Dunford de A*

Q3 : Si $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$ *est une décomposition de Dunford on a bien* $A=D+N=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$*, D est diagonale donc diagonalisable et* $N^2=0$ *donc N est nilpotente.*
Cependant $DN=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\neq ND=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$*.*
Ce couple n'est donc pas la décomposition de Dunford de A

Q4 : Comme $B\in GL_n(K)\Rightarrow \det(B-N)=\det(B)\det(I_n-B^{-1}N)$
$BN=NB\Rightarrow NB^{-1}=B^{-1}N$*, comme N est nilpotente, il existe un entier p tel que* $N^p=0$
Donc $\left(B^{-1}N\right)^p=\left(B^{-1}\right)^p N^P=0$*, la matrice* $B^{-1}N$ *est nilpotente donc trigonalisable et son spectre est réduit à* $\{0\}$*, il existe donc* $Q\in GL_n(K)$ *telle que* $B^{-1}N=PTP^{-1}$ *où* $T=\begin{pmatrix}0&t_{1,2}&\cdots&t_{1,n}\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&t_{n-1,n}\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$
Ainsi $\det(I_n-B^{-1}N)=\det\left(Q(I_n-T)Q^{-1}\right)=\det(I_n-T)=1\Rightarrow\det(B-N)=\det(B)$

Q5 : $\chi_A(x)=\det(xI_n-D-N)$ *si x n'est pas une valeur propre de D (* $x\notin Sp(D)$*) alors la matrice* $xI_n-D\in GL_n(K)$*, d'après la question4,* $\chi_A(x)=\det(xI_n-D-N)=\det(xI_n-D)=\chi_D(x)$
$\forall x\in K$*, on pose* $R(x)=\chi_A(x)-\chi_D(x)$ *ce polynôme admet une infinité de racines car le spectre de D est fini, R est donc le polynôme nul* $\chi_A(x)=\chi_D(x)$*, A et D ont le même polynôme caractéristique*

Q6 : Soit $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$*, si cette matrice admet une décomposition de Dunford* (D,N) *où la matrice D est diagonalisable alors son polynôme caractéristique sera scindé* $\chi_D(x)=(x-a)(x-b)$ *or* $\chi_A(x)=x^2+1$ *n'est pas scindé ce qui contredit le résultat de la question5*

Q7 : $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$ *on obtient immédiatement* $\chi_A(x)=(x+1)^3$

Si (D,N) *est la décomposition de Dunford de A alors* $\chi_D(x)=(x+1)^3$*, or D est diagonalisable son polynôme minimal diviseur du polynôme caractéristique est donc scindé à racine simple, soit*

$\min_D(x) = x+1 \Rightarrow D = -I_3 \in \square[A]$. *On en déduit que* $N = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = 0$, *N est nilpotente. Or* $ND = -N = DN$

Donc la décomposition de Dunford de A est $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right)$

Q8 : Nous avons $A = -D + N \Rightarrow \exp(A) = \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$ *car* $ND = DN$

Ici $D = -I_3 \Rightarrow \exp(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_3 = e^{-1} I_3$

Et $N^2 = 0 \Rightarrow \exp(N) = I_3 + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. *Finalement* $\exp(A) = \begin{pmatrix} 5e^{-1} & 0 & 8e^{-1} \\ 3e^{-1} & e^{-1} & 6e^{-1} \\ -2e^{-1} & 0 & -3e^{-1} \end{pmatrix}$

Q9 : Si $P(X) = X(X-1)$ *alors* $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0$

La matrice A^2 *admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc* A^2 *est diagonalisable.*
On pose alors $D = A^2 \in K[A]$ *et* $N = A - A^2$

$N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$, *donc N est nilpotente*

$DN = A^2(A - A^2) = A^3 - A^4 = ND$

Donc $(D,N) = (A^2, A - A^2)$ *est la décomposition de Dunford de A*

Q10 : On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(x) = (x-1)(x-2)^2$

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 donc* $\dim E_2(A) = 1 \neq m(2) = 2$. *Donc A n'est pas diagonalisable*

Le polynôme caractéristique reste cependant scindé et $Sp(A) = \{1, 2\}$

Q11 : Les polynômes $x-1$ *et* $(x-2)^2$ *sont premiers entre eux, d'après le théorème de décomposition des noyaux* $\ker(\chi_u(u)) = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - 2Id)^2$, *d'après le théorème de Cayley-Hamilton* $\chi_u(u) = 0$

Donc $E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - 2Id)^2$

$\dim E_1(A) = 1$ *et* $\ker(u - Id) = Vect\left((0,1,1)^T\right)$, *soit* $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 1 donc* $\dim\left(\ker(u - 2Id)^2\right) = 2$

Prenons $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(u-2Id)^2 \setminus \ker(u-2Id)$ *et* $\varepsilon_2 = (u-2Id)(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(u-2Id)$

La base demandée est ainsi construite.

Q12 : $B = mat(u,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -B^2 + 4B - 2I_3$ *qui est diagonale donc diagonalisable et* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est nilpotente*

De plus $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

Finalement $(D,N) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ *est la décomposition de Dunford de B*

Q13 : D'après les questions 11 et 12, la matrice A est semblable à B et si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on aura* $A = PBP^{-1}$ *avec* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comme $B = D + N$ *alors* $A = PDP^{-1} + PNP^{-1}$, *avec* PDP^{-1} *qui est semblable à D donc diagonalisable, et* $(PNP^{-1})^2 = PN^2P^{-1} = 0$, *donc* PNP^{-1} *est nilpotente*

De plus $(PDP^{-1})(PNP^{-1}) = PDNP^{-1} = PNDP^{-1} = (PNP^{-1})(PDP^{-1})$

$PDP^{-1} = -A^2 + 4A - 2I_3 \in \square[A]$

(PDP^{-1}, PNP^{-1}) *est la décomposition de Dunford de A*

Après calcul on trouve $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

<u>Partie 2 :</u>

Q14 : Toute matrice trigonalisable à son polynôme caractéristique scindé donc admet une décomposition de Dunford

Q15 : L'endomorphisme u est diagonalisable, notons $Sp(u)=\{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ *ses p valeurs propres 2 à 2 distinctes. Pour* $i\in[\![1,p]\!]$, $E_{\lambda_i}(u)=\ker(u-\lambda_i Id)$ *le sous espace propre de u associé à* λ_i, *comme u et v commutent* $E_{\lambda_i}(u)$ *est stable par v. Notons* v_i *la restriction de v à* $E_{\lambda_i}(u)$, *on a* $v_i\in\ell\left(E_{\lambda_i}(u)\right)$
Nous savons que v est diagonalisable, donc $\min_v$ *est scindé à racines simples*
$\min_v(v)=0\Rightarrow\min_v(v_i)=0$, *ainsi* v_i *admet un polynôme annulateur SARS, donc est diagonalisable dans* $E_{\lambda_i}(u)$. *Il existe une base* β_i *de* $E_{\lambda_i}(u)$ *constituée de vecteurs propres de v, mais donc aussi de u car appartenant à* $E_{\lambda_i}(u)$. *On construit alors* $\beta=\bigcup_{i=1}^{p}\beta_i$ *qui sera alors une base de* $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_{\lambda_i}(u)$ *qui sera constituée de vecteurs propres de u et de v, elle sera la base commune de diagonalisation de u et v.*
Q16 : A et B sont diagonalisables et commutent, d'après la question 15, il existe une matrice P inversible telle que $A=PDP^{-1}$ *et* $B=P\Delta P^{-1}$ *où* D *et* Δ *sont diagonales*
$A-B=P(D-\Delta)P^{-1}$ *où* $D-\Delta$ *est diagonale donc* $A-B$ *est diagonalisable.*

Q17 : On suppose que $A^p=0$ *et* $B^q=0$, *comme A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton*

$$(A-B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}A^kB^{p+q-k}=B^q\sum_{k=0}^{p}\binom{p+q}{k}A^kB^{p-k}+A^p\sum_{k=p+1}^{p+q}\binom{p+q}{k}A^{k-p}B^{p+q-k}=0$$

Donc $A-B$ *est niltpotente*

Q18 : Si A est niltpotente alors A est trigonalisable donc son polynôme caractéristique est scindé et son spectre est réduit à $\{0\}$. *Si de plus A est diagonalisable elle sera semblable à une matrice diagonale nulle. Finalement seule la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente0.*

Q19 : On suppose que A admet 2 décomposition de Dunford (D,N) *et* (D',N')
$(D,D')\in(K[A])^2\Rightarrow DD'=D'D$ *comme les deux matrices sont diagonalisables d'après la question 16,* $D-D'$ *est diagonalisable*
$N=A-D\in K[A],\ N'=A-D'\in K[A]\Rightarrow NN'=N'N$, *comme N et N' sont nilpotentes, d'après la question 17,* $N-N'$ *est nilpotente*
Or $N-N'=A-D-(A-D')=D'-D$ *cette matrice est à la fois nilpotente et diagonalisable, d'après la question 18, c'est la matrice nulle. Ainsi* $D=D'$ *et* $N=N'$

<u>Partie 3 :</u>
Q20 : Je propose un contre exemple
Soit $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ *et* $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, *ces 2 matrices ont pour polynôme caractéristique* $(x-1)(x-2)$ *scindé à racines simples donc sont diagonalisables, soit* $(D,T)\in\left(D_2(\mathbb{C})\right)^2$ *or* $T-D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\notin D_2(\mathbb{C})$
$D_n(\mathbb{C})$ *n'est pas un sous espace vectoriel*

Q21 : $\forall(M,M')\in M_n(K),\ \varphi(M+\alpha M')=\varphi(M)+\alpha\varphi(M')$
L'application φ *est linéaire dans un endomorphisme d'un espace de dimension finie, donc continue.*

Q22 : Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$, *son polynôme caractéristique est donc scindé et A est trigonalisable*
$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A=PTP^{-1}$ *où T est triangulaire supérieure. On pose* $T=(t_{i,j})$

On construit la suite de matrices $\forall k \in \mathbb{N}^*, T_k = \begin{pmatrix} t_{1,1}+\frac{1}{k} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2}+\frac{2}{k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}+\frac{n}{k} \end{pmatrix}$

On a $T_k \to T$ *or* φ *est continue donc* $\varphi(T_k) = PT_kP^{-1} = B_k \to \varphi(T) = A$

Les valeurs propres de T_k *sont les* $\lambda_i = t_{i,i} + \dfrac{i}{k}$

Si $i \neq j,\ t_{i,i} = t_{j,j} \Rightarrow d_i - d_j = \dfrac{i-j}{k} \neq 0$

Si $i \neq j,\ t_{i,i} \neq t_{j,j} \Rightarrow d_i - d_j = t_{ii} - t_{jj} + \dfrac{i-j}{k} \neq 0$ *(pour k suffisamment grand)*

Finalement a partir d'un certain rang k, T_k *admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes, donc est diagonalisable. Ainsi* $\varphi(T_k)$ *est semblable à une matrice diagonalisable donc est aussi diagonalisable et converge vers A.*

En conclusion $D_n(\mathbb{C})$ *est dense dans* $M_n(\mathbb{C})$

Q23 : Je note $\rho : A \mapsto D$ *lorsque* (D, N) *est la décomposition de Dunford de A*

D'après la question 1 , si $A \in D_n(\mathbb{C})$ *alors sa décomposition de Dunford est* $(A, 0)$ *donc* $\rho(A) = A$*. La restriction de* ρ *à* $D_n(\mathbb{C})$ *est donc l'identité.*

Si ρ *est continue sur* $M_n(\mathbb{C})$ *comme elle coïncide avec l'identité sur une partie dense*

Alors $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \rho(A) = A$*. Ce qui est impossible, donc* ρ *n'est pas continue sur* $M_n(\mathbb{C})$