Exercice n°1 :

1. Décrivons l'événement $(X = Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n, Y = n)$, cette réunion est disjointe donc par σ -additivité on a $P(X = Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X = n, Y = n)$ or les VAD sont indépendantes donc $P(X = n, Y = n) = P(X = n)P(Y = n)$

$$\text{Finalement } P(X = Y) = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{4}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{4}{9} \frac{9}{8} = \frac{1}{2}$$

2. On a $(X < Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n, Y > n)$ (réunion disjointe et indépendance de X et T) donc $P(X < Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X = n)P(Y > n)$

$$\text{Or } P(Y > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Y = k) = \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$P(X < Y) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{2}{9} \frac{9}{8} = \frac{1}{4}$$

3. S vérifie $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (S = n) = \bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)$ (réunion disjointe)

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes})$$

$$P(S = n) = \frac{4}{9} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = (n+1) \frac{4}{9} \frac{1}{3^n}$$

Exercice n°2 :

1. On pose $f_k : x \mapsto e^{\frac{itx}{2^k}}$, sachant que les $(\varepsilon_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont indépendantes on peut affirmer que les $(f_k(\varepsilon_k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ le sont aussi.

$$\Phi_{X_n}(t) = E\left(e^{itX_n}\right) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^n E\left(e^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right)$$

$$\text{Or } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E\left(e^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \sum_{x \in \{-1, 1\}} e^{\frac{itx}{2^k}} P(\varepsilon_k = x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{it}{2^k}} + \frac{1}{2} e^{\frac{it}{2^k}} = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

$$\text{Finalement } \Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

2. Effectuons un raisonnement par récurrence sur l'entier n

$$\text{Si } n = 1, \sin\left(\frac{t}{2}\right) \Phi_{X_1}(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin t$$

$$\text{On suppose que } \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} \sin t$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \Phi_{X_{n+1}}(t) &= \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \left(\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} \sin t = \frac{\sin t}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n} \sin t$$

3. On considère le cas où $t \neq 0$, $\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t}$ car $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim \frac{t}{2^n}$
 Si $t = 0$, $\Phi_{X_n}(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

On peut donc affirmer que (Φ_{X_n}) CVS vers H sur $\mathbb{R}$ telle que $H : \begin{cases} t \mapsto \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$

(on peut observer que H est continue sur $\mathbb{R}$)

4. On procède à nouveau par récurrence sur n

$$\text{Si } n=1, X_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ et } -X_1 = -\frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow X_1(\Omega) = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = -X_1(\Omega)$$

$$P\left(X_1 = \frac{1}{2}\right) = P(\varepsilon_1 = 1) = 0 = P(\varepsilon_1 = -1) = P\left(-X_1 = \frac{1}{2}\right)$$

Donc $(X_1, -X_1)$ suivent la même loi

On suppose que $(X_n, -X_n)$ suivent la même loi

$$X_{n+1} = X_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ et } -X_{n+1} = -X_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ or } \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}, -\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}\right) \text{ suivent la même loi}$$

Il reste donc à justifier que si 2 VAD indépendantes suivent respectivement la même loi alors leur addition aussi

(je propose de le prouver ainsi)

$$\text{On a } S = X + Y \text{ et } S' = X' + Y' \text{ avec } S(\Omega) = S'(\Omega)$$

$\forall s \in S(\Omega), B_s = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), s = x + y\}$ qui partitionne l'univers image de S

$$P(S = s) = \sum_{(x,y) \in B_s} P(X = x, Y = y) = \sum_{(x,y) \in B_s} P(X = x)P(Y = y) \quad (\text{indépendance})$$

$$\sum_{(x,y) \in B_s} P(X' = x)P(Y' = y) = P(S' = s)$$

On donc ainsi affirmer que S et S' suivent la même loi

Si on applique ce résultat à $(X_{n+1}, -X_{n+1})$ la démonstration sera terminée

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X_n, -X_n)$ suivent la même loi

5. Par linéarité de l'espérance $\Phi_{X_n}(t) = E(\cos(tX_n)) + iE(\sin(tX_n))$
 Or $(X_n, -X_n)$ suivent la même loi donc $E(\sin(tX_n)) = E(\sin(-tX_n)) = -E(\sin(tX_n))$

$$\text{Ainsi } \Phi_{X_n}(t) = E(\cos(tX_n)) = \varphi_n(t)$$

On peut affirmer que (φ_{X_n}) CVS vers H sur $\mathbb{R}$

Problème :

1. La fonction g_s est C^2 sur $]-1,1[$ et $g_s'(x) = f_s'(x) - f_s'(-x)$, $g_s''(x) = f_s''(x) + f_s''(-x)$
 $(1-x^2)g_s''(x) - 2(s+2)xg_s'(x) - 2(s+1)g_s(x) = (1-x^2)f_s''(x) - 2(s+2)xf_s'(x) - 2(s+1)f_s(x)$
 $+ (1-(-x)^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-x)f_s'(-x) - 2(s+1)f_s(-x) = 0$

g_s est bien solution de (E_s)

2. On a $g_s(0) = f_s(0) + f_s(0) = 0$ et $g_s'(0) = f_s'(0) - f_s'(0) = 0$

Ainsi g_s est bien solution de $\begin{cases} (E_s) \\ y(0) = y'(0) \end{cases}$ qui est un problème de Cauchy admettant

également $x \mapsto 0$ comme solution, en vertu de l'unicité de la solution $\forall x \in]-1,1[$, $g_s(x) = 0$

Finalement f_s est impaire

3. On pose $y_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$, $y_\alpha'(x) = -2\alpha x(1-x^2)^{\alpha-1}$

$$y_\alpha''(x) = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)x^2(1-x^2)^{\alpha-2}$$

$$y_\alpha \text{ solution de } (E_s) \Leftrightarrow (1-x^2)^{\alpha-1} (-2\alpha - 2(s+1) + (4\alpha^2 + 2\alpha + (4\alpha+2)(s+1))x^2) = 0$$

$$y_\alpha \text{ solution de } (E_s) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 2(s+1) = 0 \\ (4\alpha+2)(s+1+\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -(s+1)$$

4. On pose $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x) \Leftrightarrow f_s(x) = u_s(x) y_\alpha(x)$

$$f_s'(x) = u_s'(x) y_\alpha(x) + u_s(x) y_\alpha'(x) \text{ et } f_s''(x) = u_s''(x) y_\alpha(x) + 2u_s'(x) y_\alpha'(x) + u_s(x) y_\alpha''(x)$$

Sachant que f_s et y_α sont solutions de (E_s) on obtient en remplaçant dans (E_s) l'équation

$$\text{suivante : } (1-x^2)^\alpha ((1-x^2)u_s''(x) + 2sxu_s'(x)) = 0$$

On peut donc affirmer que u_s' est solution de $(F) : (1-x^2)y'(x) + 2sxy(x) = 0$

5. On a $\int \frac{2sx}{1-x^2} dx = -s \ln(1-x^2)$, donc les solutions de (F) sont $x \mapsto K(1-x^2)^s$

$$\text{Or } u_s'(0) = 1 \Rightarrow u_s'(x) = (1-x^2)^s. \text{ Sachant que } u_s(0) = 0 \Rightarrow u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$$

6. On pose $\forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, y est C^2 sur $]-R, R[$ (on choisira $R \leq 1$)

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1}$$

y est solution de (E_s) si et seulement si

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+2) \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+1) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} = 0 \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)(2n+3)c_{n+1} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+2) \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+1) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} = 0 \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \left[2(n+1)(2n+3)c_{n+1} - (2(2n+1)(n+s+2) + 2(s+1))c_n \right] x^{2n+1} = 0 \end{aligned}$$

En vertu de l'unicité du D.S.E on obtient y est solution de (E_s) si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \quad 2(n+1)(2n+3)c_{n+1} = (2(2n+1)(n+s+2) + 2(s+1))c_n$$

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)(2n+3)c_{n+1} = ((2n+2)s + (2n+1)(n+2) + 1)c_n$$

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)(2n+3)c_{n+1} = ((2n+2)s + (n+1)(2n+3))c_n$$

$$\forall n \geq 0, \quad c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} c_n$$

(on retrouve l'expression demandée avec $a = 2$, $b = 2s + 3$ et $d = 3$)

7. Pour que (E_s) admette une solution polynomiale impaire non nulle il faut qu'à partir d'un

$$\text{certain rang } n \text{ on ait } c_{n+1} = 0 \text{ soit } 2s + 2n + 3 = 0 \Leftrightarrow s = -n - \frac{3}{2}$$

8. On pose pour $x \neq 0$, $w_n = c_n x^{2n+1} \Rightarrow \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \frac{2s+2n+3}{2n+3} x^2 \rightarrow x^2$

Si $|x| < 1$ alors $\sum w_n$ converge absolument donc $R \geq 1$

Comme $R \leq 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^{2n+1}$ est 1

9. On a $c_n = \frac{2s+2n+1}{2n+1} c_{n-1} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) c_0$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \text{ est solution de } (E_s) \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = c_0$$

Si on impose $c_0 = 1$ alors y est solution du même problème de Cauchy que f_s

Ce qui prouve que f_s est développable en série entière et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s+2k+1) x^{2n+1}$$

10. On voit que $\int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} dt = u_s(x)$ où $s = -p - \frac{3}{2}$

Nous sommes dans la situation de la question 7 où (E_s) admet une solution polynomiale que

l'on pourra noter $f_s(x) = Q_p(x)$ alors

$$u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}} \text{ car } -s-1 = p + \frac{1}{2}$$

$$\text{Finalement } \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} dt = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}$$

11. Dans le cas où $p=0$, $\int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{Q_0(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ où $Q_0(x) = f_{\frac{3}{2}}(x) = x$

Donc $\int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Dans le cas où $p=1$, $\int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} dt = \frac{Q_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ où $Q_1(x) = f_{\frac{5}{2}}(x) = x - \frac{2}{3}x^3$

Donc $\int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} dt = \frac{x - \frac{2}{3}x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Exercice n°3 :

Pour tout $t \in]0,1]$, $e^{t \ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n!}$

On pose donc $\forall n \geq 0, \forall t \in]0,1], f_n(t) = \frac{t^n \ln t}{n!}$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0,1]$, $|f_n(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc $f_n \in L^1(]0,1])$

La série de terme général f_n converge simplement vers $t \mapsto e^{t \ln t}$ qui est continue sur $]0,1]$

On pose $N_1(f_n) = \int_0^1 |f_n(t)| dt = -\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \ln t dt = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$ (après une IPP)

On a $\sum N_1(f_n)$ convergente, d'après le théorème d'intégration termes à termes (ITT) $t \mapsto e^{t \ln t}$ est intégrable et $\int_0^1 e^{t \ln t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} = -\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n)!}$