Saint Rémi : MP (programme 2022)
David Corneillie

Chap A1 :
Espaces vectoriels normés

I) Normes :

1°) Définition :

Def : Soit E un K espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ *qui vérifie :*

$$N(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad (\textit{séparation})$$
$$\forall x\in E, \forall \lambda\in K : N(\lambda x)=|\lambda| N(x)$$
$$\forall (x,y)\in E^2,\ N(x+y)\le N(x)+N(y)$$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.
Généralement, s'il n'y a pas de confusion possible on note : $N(x)=\|x\|$.
Sur $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$: $N(x)=|x|$.

Prop : $\forall (x,y)\in E^2, |N(x)-N(y)|\le N(x-y)$.

Dem : $N(x)=N(x-y+y)\le N(x-y)+N(y) \Rightarrow N(x)-N(y)\le N(x-y)$

De même $N(y)-N(x)\le N(y-x)=N(x-y)$

Prop : Si $\langle x,y\rangle$ *est un produit scalaire sur E, on définit la norme associée par* $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Dem : $\|x\|=0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$ *car le produit scalaire est défini*

$\|\lambda x\|=\sqrt{\langle \lambda x,\lambda x\rangle}=\sqrt{\lambda^2\langle x,x\rangle}=|\lambda|\|x\|$

$\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle\le(\|x\|+\|y\|)^2$ *(par Cauchy Schwarz)*

Ex : Soit $E=\mathbb{R}^2$ *et pour tout* $x=(a,b)$, $N(x)=\sqrt{a^2+2ab+5b^2}$ *: N définit une norme.*

Def : Dans un espace vectoriel normé, un vecteur x est dit unitaire lorsque $\|x\|=1$. *L'ensemble des éléments unitaires sera appelé la sphère unité.*

Rem : Si $x\neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ *est un vecteur unitaire.*

2°) Des exemples de normes :

- *Soit* $E=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,....,x_i,...,x_n)$ *, on définit 3 normes :*

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i| \ ;\ \|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \ ;\ \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

- *Soit E l'ensemble des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\quad \|f\|_1=\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \ \textit{et}\ \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

(on les appelle les normes de la convergence uniforme, de la convergence en moyenne et de la convergence quadratique)

Dem : $\|f\|_\infty$ *existe car f est continue sur un segment donc bornée*

$\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b],\ \ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$

$\forall x \in [a,b]\,,\ |\lambda f(x)| \le |\lambda| \|f\|_\infty \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty \le |\lambda| \|f\|_\infty$

Si $\lambda \ne 0\,,\ |f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \le \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty \Rightarrow \|f\|_\infty \le \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$

Donc $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$, *l'égalité étant trivialement vérifiée quand* $\lambda = 0$

$\forall x \in [a,b]\,,\ |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Rightarrow \|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Rem : Lorsque les expression existent, on pourra utiliser alors le résultat $\sup(kA) = |k| \sup(A)$.

3°) Notion de distance :

Si N est une norme sur E, on définit d de $E \times E$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $d(x,y) = N(x-y)$, *d est alors la distance associée à la norme N.*
Plus généralement une distance est une application de $E \times E$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in E^2 :\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$
$$\forall (x,y) \in E^2 :\ d(x,y) = d(y,x)$$
$$\forall (x,y,z) \in E^3 :\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

On définit également pour toute partie A de E : $d(x,A) = \inf\limits_{y \in A} d(x,y)$.

Rem : $d(x,A) = 0 \not\Rightarrow x \in A$, *par exemple on a* $d(0,\mathbb{R}^*) = 0$.

4°) Normes équivalentes :

Def : Deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si
$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{*+}$ *tels que* $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x)$.

Exo : Dans $\mathbb{R}^n$ *les normes* N_1, N_2 *et* N_∞ *sont équivalentes .*

$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ |x_i| \le N_\infty(x) \Rightarrow N_1(x) \le n N_\infty(x)$

Soit j tel que $|x_j| = N_\infty(x) \Rightarrow N_\infty(x) \le N_1(x)$

Donc N_1 *et* N_∞ *sont équivalentes*

$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ |x_i|^2 \le N_\infty{}^2(x) \Rightarrow N_2(x) \le \sqrt{n} N_\infty(x)$

Soit j tel que $|x_j| = N_\infty(x) \Rightarrow N_\infty(x) \le N_2(x)$

Donc N_2 *et* N_∞ *sont équivalentes*

N_1 *et* N_2 *le sont par transitivité de la relation d'équivalence*

Contre Ex : Dans $\mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{d} |a_i|$ *et* $N_\infty(P) = \sup\limits_k |a_k|$ *ne sont pas équivalentes.*

Dem : Pour la suite de polynômes $P_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i$, $N_1(P_n) = n$ *et* $N_\infty(P_n) = 1$

Si les deux normes sont équivalentes $\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ N_1(P_n) = n \le \alpha N_\infty(P_n) = \alpha$

Rem : il suffit d'avoir $\dfrac{N_1(x)}{N_2(x)}$ *ou* $\dfrac{N_2(x)}{N_1(x)}$ *non bornées pour que les normes ne soient pas équivalentes.*

5°) Extension aux normes d'algèbre

Si $(A,+,\times,.)$ *est une K-algèbre, on dit qu'elle est normée s'il existe une norme* $\| \ \|$ *sur A telle que* $\|1\|=1$ *et que* $\forall (a,b)\in A^2,\ \|ab\|\le \|a\|\|b\|$

Ex : Sur $M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|=\max\left(|a_{ij}|\right)$ *est une norme mais pas une norme d'algèbre*

En effet $A=\begin{pmatrix} 2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $AB=\begin{pmatrix} 6.4 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix}$

6°) Boules ouvertes et fermées :

Def : Soient E un espace vectoriel normé et x un élément de E, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon r le sous ensemble de E défini par :

$$B_o(x,r)=\left\{y\in E, \|y-x\|<r\right\}$$

On appelle boule fermée de centre x et de rayon r le sous ensemble de E défini par :

$$B_F(x,r)=\left\{y\in E, \|y-x\|\le r\right\}$$

Ex : Dans $\mathbb{R}$, $B_0(x,r)=\left]x-r,x+r\right[$

Exo : Dessiner des boules unités fermées sur $\mathbb{R}^2$ *avec les différentes normes.*

II) Suites d'un espace vectoriel normé :

Notation : $E^{\mathbb{N}}$ *est l'ensemble des suites d'éléments de E*

$$(u_n)\in E^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n\in \mathbb{N},\ u_n\in E$$

1°) Suites convergentes :

Def : Une suite (u_n) *de l'espace vectoriel normé* $(E,\| \ \|)$ *est convergente dans E si et seulement si* $\exists L\in E$, *tel que* $\forall \varepsilon>0,\ \exists N$ *tel que* $n>N \Rightarrow \|u_n-L\|<\varepsilon$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente, ceci se traduit par :

$$\forall L\in E\ ,\exists \varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists p>N \text{ tel que } \|u_p-L\|\ge\varepsilon$$

Exo : Dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$*,montrer que la suite* (u_n) *définie par* $u_n : t\mapsto t^n(1-t)^n$ *converge vers 0.*

Th : Si une suite de E est convergente alors l'élément L de E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n-L\|=0$ *est unique, et sera appelé la limite de la suite, on la note :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dem : On suppose l'existence de L_1 *et* L_2 *telles que* $\|u_n-L_1\|\to 0$ *et* $\|u_n-L_2\|\to 0$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1 \text{ tel que si } n>N_1 \Rightarrow \|u_n-L_1\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_2 \text{ tel que si } n>N_2 \Rightarrow \|u_n-L_2\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Alors si $n>\max(N_1,N_2)$: $\|L_1-L_2\|\le\|u_n-L_1\|+\|u_n-L_2\|<\varepsilon \Rightarrow L_1=L_2$

Prop : Si une suite converge relativement à une norme, elle converge également relativement à toute norme équivalente.

Dem : On suppose que $N_1(u_n - L) \to 0$ *et que* $\forall x \in E,\ N_2(x) \le \alpha N_1(x)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ *tel que si* $n > n_0$: $N_1(u_n - L) < \dfrac{\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow N_2(u_n - L) < \varepsilon$

Contre exemple : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$.

Soit (f_n) *definie par* $f_n(t) = t^n$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$, *cette suite converge vers la fonction nulle au sens de la norme* $\|\ \|_1$, *mais* $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(t)| = 1$, *et ne converge donc pas vers la fonction nulle au sens de la norme* $\|\ \|_\infty$

<u>*2°) Propriétés des suites convergentes :*</u>

Def : Une suite (u_n) *est bornée s'il existe un réel M tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \le M$.

Def : On appelle $\ell_\infty(E)$, *l'espace vectoriel des suites bornées de E, il est muni d'une norme* $N_\infty((u_n)) = \sup_n \|u_n\|$.

Rem : Si une suite est bornée pour une norme elle l'est aussi pour toute norme équivalente.

Prop : Toute suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé est bornée.

Dem : Il existe un entier N tel que si $n > N$: $\|u_n\| \le \|u_n - L\| + \|L\| < 1 + \|L\|$

Et si $n \le N$: $\|u_n\| \le \max_{i \in [\![0,N]\!]} \|u_i\|$

Exemple : $f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + n^2 \ \ si\ x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0\ si\ x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \dfrac{n}{2}$

La suite n'est pas bornée, elle ne converge donc pas au sens de la norme $\|\ \|_1$

Prop : L'ensemble des suites convergentes de E est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites de points de E, l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire, autrement dit on a $\lim_{n\to\infty}(au_n + bv_n) = a\lim_{n\to\infty} u_n + b\lim_{n\to\infty} v_n$.

Th de Césaro : Soit (u_n) *une suite qui converge vers L alors la suite de terme général* $C_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_p$ *converge aussi vers L.*

Exo : Soit une suite (u_n) *telle que* $\lim_{n\to\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0$. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$

Th : Une suite (u_n) *de* $E_1 \times .. \times E_p$ *est convergente si et seulement si les p suites coordonnées* $(u_{i,n})$ *sont convergentes dans* E_i.

Dem : On note $N_\infty(x) = \max_{i\in[\![1,p]\!]} N_i(x_i)$ *si* $x = (x_1, ..., x_p)$

$(\Rightarrow)$ *On a* $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ *tel que si* $n > N$: $N_\infty(x - L) < \varepsilon$ *où* $L = (l_1, ..., l_p)$

donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, *si* $n > N$ *on a* $N_i(x_{i,n} - l_i) < \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ *On a* $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_i$ *tel que si* $n > n_i$ *on a* $N_i\left(x_{i,n} - l_i\right) < \varepsilon$

on considère alors $N = \max\left(n_i\right)$ *et si* $n > N$ *alors* $N_\infty\left(x_n - L\right) < \varepsilon$

<u>3°) Suites extraites et valeur d'adhérence :</u>

Soient (u_n) *une suite d'éléments de E et* φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*, la suite définie par* $v_n = u_{\varphi(n)}$ *est appelée suite extraite (ou sous suite) de* (u_n).

Prop : Toute suite extraite d'une suite extraite de (u_n) *est une suite extraite de* (u_n).

Th : Si (u_n) *est une suite convergente de E vers la limite L alors toute suite extraite de* (u_n) *est aussi convergente vers la même limite L.*

Dem : On montre par récurrence que si φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $\varphi(n) \geq n$

Ainsi dès que $n > N \Rightarrow \varphi(n) > N \Rightarrow \left\|u_{\varphi(n)} - L\right\| < \varepsilon$

Rem : La réciproque est fausse avec $u_n = (-1)^n$.

Par contre, si les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent toutes deux vers la même limite L alors la suite* (u_n) *converge aussi vers L.*

Def : On appelle valeur d'adhérence de la suite (u_n) *toute limite d'une suite extraite de* (u_n)*, c'est-à-dire a est valeur d'adhérence de* (u_n) *lorsqu'il existe* φ *strictement croissante telle que* $u_{\varphi(n)} \to a$.

Ex : $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ *admet* 1 *et* -1 *comme valeurs d'adhérence.*

Info : L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\cos(n)$ *est* $[-1,1]$.

Th : Si (u_n) *est convergente vers L alors L est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*

Cor : Si une suite possède 2 valeurs d'adhérence alors elle diverge.

<u>4°) Comparaison entre les suites (Rappel de MPSI) :</u>

Def : *La suite* (u_n) *de E est dite dominée par la suite scalaire* (α_n) *si :*

$\exists k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ *tels que* $n > N \Rightarrow \|u_n\| \leq k|\alpha_n|$

on note alors : $u_n = O(\alpha_n)$.

Def : *La suite* (u_n) *de E est dite négligeable devant la suite scalaire* (α_n) *si :*

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > N \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon|\alpha_n|$

on note alors : $u_n = o(\alpha_n)$.

Def : *La suite* (u_n) *de E est dite équivalente à la suite* (v_n) *si la suite* $(u_n - v_n) = o(\|v_n\|)$*:*

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > N \Rightarrow \|u_n - v_n\| \leq \varepsilon\|v_n\|$

on note alors : $u_n \sim v_n$.

Prop : Cette relation est une relation d'équivalence.

Dem : R : on a $u_n - u_n = 0 = o(\|u_n\|)$

S : si $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$ *donc* $\forall \varepsilon > 0$, *on prendra* $\varepsilon \in]0,1[$ *, il existe* N *tel que si* $n > N$ *alors* $\|u_n - v_n\| < \varepsilon \|v_n\|$

Or $\|v_n\| \le \|v_n - u_n\| + \|u_n\| \Rightarrow \|u_n - v_n\| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|u_n\|$

Si ε *décrit* $]0,1[$ *alors* $\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ *décrit* $]0,+\infty[$ *donc* $u_n - v_n = o(\|u_n\|)$

T : $u_n - v_n = o(\|u_n\|)$ *et* $v_n - w_n = o(\|v_n\|)$, $u_n - w_n = o(\|u_n\|) + o(\|v_n\|) = o(\|u_n\|)$ *car* $u_n \sim v_n$

Rem : Si une suite d'éléments de E converge vers $L \neq 0$ *alors* $u_n \sim L$ *.*

Rem : (u_n) *CV vers* $0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$

Th : Si deux suites sont équivalentes et que l'une converge vers L alors l'autre converge aussi vers L.

Dem : La suite (u_n) *converge vers L elle est donc bornée,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \le M$ *.*

Or les suites (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes donc*

$\exists N$ *tel que si* $n > N$ *on a* $\|u_n - v_n\| = o(\|u_n\|) \le \dfrac{\varepsilon}{2M}\|u_n\| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ainsi : $\|v_n - L\| \le \|v_n - u_n\| + \|u_n - L\| < \varepsilon$

Cas particulier : dans le cas des suites numériques

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \text{ et } a_n = o(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Exo (très important) : $a_n \sim b_n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 1$ *alors* $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$

<u>*5°) Exemples d'étude de suites numériques (rappel MPSI) :*</u>

Utilisation de la monotonie :

Exo1 : Soit la suite (q_n) *réelle croissante telle que* $q_0 \ge 2$ *et* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \ldots q_k}$

Montrer que la suite (u_n) *est convergente.*

Suite récurrente monotone :

Exo2 : On note $mil(a,b,c)$ *le réel parmi a, b et c qui est entre les deux autres*

Soit la suite $(u_n) : u_0 \in [0,1]$ *et* $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 mil\left(u_n, t, \frac{1}{2}\right) \mathrm{dt}$ *. Etudier cette suite.*

Suite arithmético-géométrique :

Exo3 : On considère la suite $u_{n+1} = au_n + b$ *et* $u_0 \in \mathbb{R}$ *,* $a \neq 1$

Alors si on pose $L = \dfrac{b}{1-a}$ *et* $v_n = u_n - L$ *, la suite* (v_n) *est géométrique de raison a.*

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

Exo4 : Etudier la suite définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ *et* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$

Exo5 : Soit la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ *et* $u_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}u_n}}$

Etudier la convergence de la suite (u_n) *(on pourra introduire la suite* $w_n = \ln(u_n)$*).*

<u>III) Topologie dans un espace vectoriel normé :</u>

<u>1°) Intérieur et voisinage :</u>

Soient A une partie de E et x un élément de A, on dit que x est intérieur à A s'il existe une boule ouverte de centre x totalement incluse dans A.

L'ensemble des points intérieurs de A est appelé l'intérieur de A noté $\overset{o}{A}$.

$$x \in \overset{o}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

A est dit voisinage de x si et seulement si x est intérieur à A.
Sinon on dit que x est un point isolé de A.

Prop : $\overset{o}{A} \subset A$, $A \subset B \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$, $\overset{o}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ *et* $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$

Dem : $\odot$ $x \in \overset{o}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$ *, or* $x \in B_o(x,r) \Rightarrow x \in A$

$\odot$ $x \in \overset{o}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A \subset B \Rightarrow x \in \overset{o}{B}$

$\odot$ $A \cap B \subset A \Rightarrow \overset{o}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{o}{A}$ *et* $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{o}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{o}{B}$ *donc* $\overset{o}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$

Soit $x \in \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \Rightarrow \exists (r_1, r_2)$ *tel que* $B_o(x,r_1) \subset A$ *et* $B_o(x,r_2) \subset B$

On prend $r = \inf(r_1, r_2)$, $B_o(x,r) \subset A \cap B \Rightarrow \overset{o}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$

$\odot$ $A \subset A \cup B \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$ *et* $B \subset A \cup B \Rightarrow \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$ *donc* $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$

Par contre $A = [0,1[$ *et* $B = [1,2]$ *contredit l'inclusion réciproque*

<u>2°) Ouverts de E :</u>

Def : Une partie A de E est dit ouverte si et seulement si elle est égale à son intérieur, c'est-à-dire si et seulement si tout point de A est centre d'une boule ouverte incluse dans A.

Prop : Toute boule ouverte de E est un ouvert de E

Dem : On note $B = B_o(x,r)$, $\forall y \in B$ *on a* $\|x - y\| < r$ *, soit* $r' = r - \|x - y\|$

$\forall z \in B_o(y,r')$ *on a* $\|z - y\| < r'$ *et* $\|z - x\| \le \|z - y\| + \|y - x\| < r' + \|y - x\| = r \Rightarrow z \in B$

donc $B_o(y,r') \subset B$ *et B est bien un ouvert*

Prop : L'intérieur d'une partie est un ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans cette partie.

Dem : Soit $x \in \overset{o}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, B(x,r) \subset A$. *On considère* $y \in B_o(x,r)$ *qui est un ouvert*

Donc il existe $r' > 0$ *tel que* $B_o(y,r') \subset B_o(x,r) \subset A \Rightarrow y \in \overset{o}{A}$

i.e. $B_o(x,r) \subset \overset{o}{A} \Rightarrow x \in \overset{o}{\overset{o}{A}}$. *Soit O un ouvert de A,* $O \subset A \Rightarrow \overset{o}{O} = O \subset \overset{o}{A}$

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, tout intervalle du type $]a,b[$ est un ouvert.

Prop : Les réunions et les intersections finies d'ouverts sont des ouverts de E.

Dem : Soit (Ω_i) une famille d'ouverts, et $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$

Si $x\in\Omega \Rightarrow \exists i\in I$ tel que $x\in\Omega_i \Rightarrow \exists r_i>0$ tel que $B_o(x,r_i)\subset\Omega_i\subset\Omega$ donc Ω est ouvert

On note $\Delta = \bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$, si $x\in\Delta \Rightarrow \forall i\in[\![1,n]\!]\ x\in\Omega_i \Rightarrow \forall i, \exists r_i>0$ tel que $B_o(x,r_i)\subset\Omega_i$

On considère $r=\min(r_i, i=1..n)$ alors $\forall i,\ B_o(x,r)\subset\Omega_i \Rightarrow B_o(x,r)\subset\Delta$ est un ouvert

Rem : $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_0\left(x,\frac{1}{i+1}\right)=\{x\}$ n'est pas un ouvert

Rem : De même un produit fini d'ouverts est aussi un ouvert du produit des espaces.

Exemple : Si $f: x\mapsto \frac{1}{x}$ alors $f(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert, par contre si $f: x\mapsto \sin(x)$ alors $f(\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert.

Rem : La donnée de l'ensemble des ouverts de E définit la topologie de E, cette topologie dépend du choix de la norme.

Th : On note $\|\ \|$ et N deux normes équivalentes sur E.

Soit Ω un ouvert dans $(E,\|\ \|)$, alors Ω est un ouvert dans (E,N).

Ce résultat prouve que deux normes équivalentes définissent la même topologie sur un espace vectoriel normé.

Dem : $\exists(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$, tel que $\forall x\in E,\ \alpha N(x)\le\|x\|\le\beta N(x)$

$\forall x\in\Omega$ qui est un ouvert de $(E,\|\ \|)$, il existe $r>0$ tel que $B_o(x,r)\subset\Omega$

c'est-à-dire que $\|y-x\|<r\Rightarrow y\in\Omega$

On pose $r'=\frac{r}{\beta}>0$, $\forall y\in B_o(x,r'),\ N(y-x)<r'$

Alors $\|y-x\|\le\beta N(y-x)<r\Rightarrow y\in\Omega$ soit $B_o(x,r')\subset\Omega$

Finalement Ω est un ouvert dans (E,N)

Soit A une partie de E, on appellera ouvert de A l'intersection de A avec tout ouvert de E, la topologie de A sera appelée la topologie induite sur A.

Exemple : $[a,c[\ =\ ]d,c[\cap[a,b]$ est un ouvert de $[a,b]$ au sens de la topologie induite.

3°) Adhérence et parties fermées de E :

Def : Un élément x de E est un point adhérent de A si et seulement si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de A.

L'ensemble des points adhérents de A est appelé l'adhérence de A notée $\overline{A}$.

$$x\in\overline{A}\Leftrightarrow\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\varnothing$$

Prop : $A\subset\overline{A}$; $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

(voir le cas où $A=[0,1[$ et $B=]1,2]$)

Dem : $\odot$ *Si* $x \in A \Leftrightarrow \forall r > 0,\ x \in B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ *donc* $A \subset \overline{A}$

$\odot$ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ *or* $A \subset B$ *donc* $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$

$\odot$ $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Si $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \forall r > 0,\ B_o(x,r) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ *i.e.* $\left(B_0(x,r) \cap A\right) \cup \left(B_0(x,r) \cap B\right) \neq \varnothing$

Donc soit $\left(B_0(x,r) \cap A\right) \neq \varnothing$ *et* $x \in \overline{A}$, *soit* $\left(B_0(x,r) \cap B\right) \neq \varnothing$ *et* $x \in \overline{B}$ *donc* $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

$\odot$ $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Def : Une partie F de E est dite fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence, c'est-à-dire tout point adhérent de F appartient à F.

Th : A une partie non vide de E différente de E, A est une partie fermée de E si et seulement si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

Dem : $(\Rightarrow)$ *on note* $\Omega = E - A$, *si* $x \in \Omega \Rightarrow x \notin A = \overline{A}$

donc $\exists r > 0$ *tel que* $B_0(x,r) \cap A = \varnothing \Rightarrow B_0(x,r) \subset \Omega$ *qui est donc un ouvert*

$(\Leftarrow)$ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, *si* $x \notin A \Rightarrow x \in \Omega = E - A$ *qui est un ouvert*

donc $\exists r_0 > 0$ *tel que* $B_o(x,r_0) \subset \Omega \Rightarrow B_o(x,r_0) \cap A = \varnothing$ *ce qui est impossible, donc* $x \in A$

Exemple : $\mathbb{Z}$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}$ *car* $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ *est une réunion d'ouverts.*

Prop : Toute boule fermée de E est une partie fermée de E.

Dem : Soit $\Omega = E - B_F(a,r)$, $x \in \Omega \Leftrightarrow \|x-a\| > r$

Soit $r' = \|x-a\| - r > 0$ *et on considère* $y \in B_o(x,r') \Rightarrow \|x-y\| < r'$

$\|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\| < r' + \|y-a\| = \|x-a\| - r + \|y-a\| \Rightarrow \|y-a\| > r$

Donc $y \in \Omega$ *et* $B_o(x,r') \subset \Omega$ *qui est donc un ouvert.*

Prop : L'adhérence de A est la plus petite partie fermée contenant A.

Dem : Soit $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B_o(x,r) \cap \overline{A} \neq \varnothing$

On suppose par l'absurde que $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists r > 0$ *tel que* $B_o(x,r) \cap A = \varnothing$

Cependant il existe bien $z \in B_o(x,r) \cap \overline{A}$ *or* $B_0(x,r)$ *est un ouvert, donc z est le centre d'une boule*

$B_o(z,r_1) \subset B_o(x,r) \Rightarrow B_o(z,r_1) \cap A = \varnothing$ *ce qui contredit* $z \in \overline{A}$

Finalement $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$

Soit F une partie fermée contenant A, on a $A \subset F$ *donc* $\overline{A} \subset \overline{F} = F$

Prop : Toute intersection et toute réunion finie de parties fermées sont des parties fermées.

Dem : $E - \bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcap_{i \in I} (E - \Omega_i)$ *et* $E - \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E - \Omega_i)$

On appelle frontière de A, l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} - \overset{o}{A} = \overline{A} \cap \left(E - \overset{o}{A} \right)$

Prop : La frontière est une partie fermée.

Dem : $Fr(A) = \overline{A} - \overset{o}{A} = \overline{A} \cap \left(E - \overset{o}{A} \right)$ *c'est donc une intersection de parties fermées*

Th (caractérisation séquentielle de l'adhérence) : E un espace vectoriel normé, un point a de E est adhérent à A si et seulement si a est la limite d'une suite de points de A.

Dem : $(\Rightarrow)$ *si* $a\in \overline{A}$ *alors* $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ B_o\left(a,\dfrac{1}{n}\right)\cap A\neq\varnothing$

Il existe donc $(a_n)\in A$ *telle que* $\|a-a_n\|<\dfrac{1}{n}\Rightarrow (a_n)$ *converge vers a*

$(\Leftarrow)$ *Soit* $(a_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *qui converge vers a*

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N$ *tel que si* $n>N,\ \|a_n-a\|<\varepsilon\Rightarrow a_n\in B_o(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ *donc a est adhérent*

Exo : Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *que l'on munit de la norme* $\|\ \|_\infty$*, on note F l'ensemble de fonctions de E telles que* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$*. Montrer que F est une partie fermée de E.*

Exo : Soit F l'ensemble des fonctions bornées sur $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *que l'on munit de la norme* $\|\ \|_\infty$*, montrer que* $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *est une partie fermée de F.*

<u>4°) Partie convexe d'un espace vectoriel :</u>

Def : Soit $A\subset E$ *est une partie convexe si* $\forall(a,b)\in A^2,\ [a,b]=\{ta+(1-t)b, t\in[0,1]\}\subset A$

$\forall(a,b)\in A^2,\ \forall t\in[0,1],\ ta+(1-t)b\in A$

Prop : Les boules ouvertes ou fermées sont des parties convexes.

Dem : Soit $B=B_F(a,r),\ \forall(x,y)\in B^2,\ \forall t\in[0,1]$*, on note* $z=tx+(1-t)y$

$\|z-a\|=\|t(x-a)+(1-t)(y-a)\|\leq t\|x-a\|+(1-t)\|y-a\|\leq(t+1-t)r=r$

Donc $z\in B\Rightarrow[x,y]\subset B$

Exo : Soit (x_n) *une suite de C qui est une partie convexe, pour tout entier n non nul on pose* $y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$*. Montrer que* $\forall n\neq0,\ y_n\in C$

Exo : L'adhérence d'une partie convexe est convexe

<u>5°) Parties bornées :</u>

Une partie A de E est bornée si et seulement si il existe un réel positif M tel que pour tout x élément de A on a : $\|x\|\leq M$.

Ex : Tout boule fermée est une partie bornée

f une application de A dans un espace vectoriel normé F est bornée si l'ensemble f (A) est une partie bornée dans F.

<u>6°) Notion de densité :</u>

Def : Soit $F\subset E$ *telle que* $\overline{F}=E$*, on dit alors que F est dense dans E*

Ex : $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *et* $GL_n(\mathbb{R})$ *dans* $M_n(\mathbb{R})$.

Dem : Version MPSI

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, si* $x<y$ *alors* $\exists r\in\mathbb{Q}$ *tel que* $x<r<y$

On a $y-x>0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ *, posons* $p=\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor +1 \Rightarrow \frac{1}{y-x} < p \Rightarrow 1 < p\left(y-x\right)$

Soit $q=\lfloor px \rfloor \Rightarrow q \le px < q+1 \Rightarrow x < \frac{1}{p}+\frac{q}{p}$

Or $y>\frac{1}{p}+x>\frac{1}{p}+\frac{q}{p}$ *: on a construit ainsi* $r=\frac{1+q}{p} \in \mathbb{Q}$

⊙ *Complément MP*

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x-\frac{1}{n} < x+\frac{1}{n}$

Il existe donc $\left(r_n\right) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $x-\frac{1}{n} < r_n < x+\frac{1}{n} \Rightarrow \left|x-r_n\right| < \frac{1}{n}$

Donc la suite $\left(r_n\right)$ *converge vers x*

IV) Etude locale d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé :

1°) Les limites :

Def : Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F, A une partie de E et a un point adhérent à A, on dit que f admet une limite b en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta \text{ tel que } \left\|x-a\right\|_E < \eta \Rightarrow \left\| f(x)-b \right\|_F < \varepsilon$$

Extension : *Si E=* $\mathbb{R}$ *si a est infini* $\forall \varepsilon>0,\ \exists A \text{ tel que } \left|x\right| > A \Rightarrow \left\| f(x)-b \right\|_F < \varepsilon$

Si F= $\mathbb{R}$ *si b est infini* $\forall K>0,\ \exists \eta \text{ tel que } \left\|x-a\right\|_E < \eta \Rightarrow \left| f\left(x\right) \right| > K$

Prop : On retrouve les propriétés connues sur les limites .....

2°) Comparaison au voisinage d'un point (Rappel de MPSI) :

Def : La fonction f est dite dominée par la fonction g au voisinage de a si :

$\exists k \in \mathbb{R},\ \exists V \in V\left(a\right) \text{ tel que } \forall x \in V,\ \left\| f\left(x\right) \right\| \le k \left| g\left(x\right) \right|$

On note alors : $f \underset{a}{=} O\left(g\right)$

Def : La fonction f est dite négligeable devant la fonction g au voisinage de a si :

$\forall \varepsilon>0,\ \exists V \in V\left(a\right) \text{ tel que } \forall x \in V,\ \left\| f\left(x\right) \right\| \le \varepsilon \left| g\left(x\right) \right|$

On note alors : $f \underset{a}{=} o\left(g\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g\left(x\right)}.f\left(x\right)=0$

Def : La fonction f est dite équivalente à la fonction g au voisinage de a si $\left(f-g\right)=o\left(\left\|g\right\|\right)$*:*

i.e. $\forall \varepsilon>0,\ \exists V \in V\left(a\right) \text{ tel que } \forall x \in V \Rightarrow \left\| f\left(x\right)-g\left(x\right) \right\| \le \varepsilon \left\| g\left(x\right) \right\|$

On note alors : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=1$ *(cas numérique)*

Exo : Déterminer un équivalent à l'infini de $x \mapsto 1-\operatorname{th}\left(x\right)$

Déterminer un équivalent en 0 *de* $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{th}\left(x\right)}-\frac{1}{x}$

Th : Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a et que l'une admette une limite L en a alors l'autre tend aussi vers L en a.

Rappel : $u \sim v$ *et* $f \sim g \Rightarrow uf \sim vg$ *et* $\frac{f}{u} \sim \frac{g}{v}$

3°) Continuité :

Def : f une application de E dans F est continue en a si et seulement f admet une limite en a qui est $f(a)$*, on obtient la caractérisation suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \text{ tel que } \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

Ex : Etude de 2 cas de fonctions de 2 variables

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ et } f(0,0)=0 \text{ puis } g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+xy+y^2} \text{ et } g(0,0)=0$$

Def : f est dite continue sur A une partie de E si f est continue en tout point de A.

Th : (Caractérisation séquentielle de la limite ou de la continuité)
f admet une limite b en a de A si et seulement si pour toute suite (x_n) *de points de A converge vers a dans E, la suite* $f(x_n)$ *converge vers b.*
f est une application continue au point a de A si et seulement si pour toute suite (x_n) *de points de A converge vers a dans E, la suite* $f(x_n)$ *converge vers* $f(a)$.

Dem : $(\Rightarrow)$ *on a* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta$ *tel que* $\|x-a\| < \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$

Or $(x_n) \to a$*, donc* $\exists N$ *tel que si* $n > N$, $\|x_n - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x_n)-f(a)\| < \varepsilon$

Donc $f(x_n) \to f(a)$

$(\Leftarrow)$ *On suppose f non continue en a*

$\exists \varepsilon > 0$ *tel que* $\forall \eta > 0$, $\exists x \in A$ *tel que* $\|x-a\| < \eta$ *et* $\|f(x)-f(a)\| > \varepsilon$

On prend $\eta = \frac{1}{n}$ *on construit* $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$ *et* $\|f(x_n)-f(a)\| \geq \varepsilon$

Exemple : $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *et* $g(0,0)=0$

Exo : Si f et g sont deux fonctions continues sur A à valeurs réelles alors $B = \{x \in A, f(x) \leq g(x)\}$ *est une partie fermée de A*

Rem : Si a est réel mais adhérent et que f admet une limite en a, on réalise un prolongement par continuité de f en a en posant $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4°) Propriétés :

Prop : L'ensemble $C(A,F)$ *des applications continues de A dans F est un espace vectoriel et l'ensemble* $C(A)$ *des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur A à valeurs dans A est une algèbre. (c'est-à-dire un espace vectoriel et un anneau)*

Prop : La restriction sur A d'une fonction continue sur E est continue sur A.

Prop : Deux fonctions f et g de A dans F continues, coïncidant sur une partie B dense dans A sont égales sur A.

Dem : Soit $x \in A = \overline{B} \Rightarrow \exists (x_n) \in B^{\mathbb{N}}$ *telle que* $x_n \to x$

Or f et g sont continues en x donc $f(x_n) \to f(x)$ *et* $g(x_n) \to g(x)$

Comme $f(x_n) = g(x_n)$ *et en vertu de l'unicité de la limite* $f(x) = g(x)$

Exo : Montrer que pour tout $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$

5°) Cas des fonctions Lipschitziennes (Lipschitz Rudolph 1832-1903)

Def : f est dite k-Lipschitzienne sur A lorsque $\forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \le k\|x - y\|$

Exemple : Les applications $x \mapsto \|x\|,\ x \mapsto d(x,A)$ *sont* $1-$*Lipschitziennes.*

Dem : $\forall z \in A,\ d(x,A) \le \|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| \Rightarrow d(x,A) - \|x - y\| \le \|y - z\|$

comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on obtient

$d(x,A) - \|x - y\| \le d(y,A)$

De même on peut obtenir $d(y,A) - \|x - y\| \le d(x,A)$

Finalement $|d(x,A) - d(y,A)| \le \|x - y\|$

Rem : Toute fonction de classe C^1 *sur* $[a,b]$ *à valeurs réelles est Lipschitzienne.*

La fonction $x \mapsto \sin x$ *est* $1-$*Lipschitzienne*

Prop : Toute fonction Lipschitzienne sur A est continue sur A.

Prop : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$

Dem : $(\Rightarrow)$ *si* $x \in \overline{A}$, $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $x_n \to x$ *or* $t \mapsto d(t,A)$ *est continue donc*

$d(x_n, A) = 0 \to d(x,A)$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$, ε *n'est pas un minorant de* $\{\|y - x\|, y \in A\}$

Donc $\exists y_0 \in A$ *tel que* $\|y - x\| \le \varepsilon \Rightarrow B_o(x,\varepsilon) \cap A \ne \varnothing$ *et* $x \in \overline{A}$

6°) Caractérisation topologique :

Th : f une application de A dans F, f est continue sur A si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de $f(A)$ *est un ouvert de A.*

Ce théorème s'applique aussi aux parties fermées.

Dem : $(\Rightarrow)$ *f est continue en x de A alors*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall y \in A : \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Soit Ω *un ouvert de* $f(A)$ *et* $\theta = f^{-1}(\Omega)$

Soit $x \in \theta \Rightarrow f(x) \in \Omega$ *donc* $\exists r > 0$ *tel que* $B_o(f(x), r) \subset \Omega$

On choisit $\varepsilon = r$ *ainsi lorsque* $y \in B_o(x,\eta) \Rightarrow f(y) \in B_o(f(x), r) \subset \Omega \Rightarrow y \in \theta$

Finalement $B_o(x,\eta) \subset \theta$ *qui est donc un ouvert*

$(\Leftarrow)$ *Soit a un élément de A, on veut montrer que f est continue en a*

$\forall \varepsilon > 0$, $B_o(f(a),\varepsilon)$ *est un ouvert de* $f(A)$ *donc* $f^{-1}(B_o(f(a),\varepsilon))$ *est un ouvert de A*

$a \in f^{-1}(B_o(f(a),\varepsilon)) \Rightarrow \exists \eta > 0$ *tel que* $B_o(a,\eta) \subset f^{-1}(B_o(f(a),\varepsilon))$

$\forall x \in B_o(a,\eta) \Rightarrow f(x) \in B_o(f(a),\varepsilon)$ *(ce qui signifie la continuité en a)*

Exemple : $GL_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $M_n(\mathbb{R})$ *et* $O_n(\mathbb{R})$ *est une partie fermée de* $M_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des projecteurs est une partie fermée de l'ensemble des endomorphismes

7°) Continuité d'une application linéaire :

Th : Si f est une application linéaire de E dans F, il y a équivalence entre les 4 propriétés

- *f est continue sur E*
- *f est continue en 0*
- *il existe une constante C > 0 telle que* $\left\| f(x) \right\|_F \leq C \left\| x \right\|_E$
- *f est Lipschitzienne sur E*

Dem : $(i) \Rightarrow (ii)$ *évident*

$(ii) \Rightarrow (iii)$ *Si f est continue en 0, on prend* $\varepsilon = 1$

$\exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in E$, $\left\| x \right\|_E < \alpha \Rightarrow \left\| f(x) \right\|_F < 1$

On considère alors $x \in S = \left\{ x \in E , \left\| x \right\|_E = 1 \right\}$ *alors* $\left\| \frac{\alpha}{2} x \right\|_E = \frac{\alpha}{2} < \alpha \Rightarrow \left\| f\left(\frac{\alpha}{2} x \right) \right\|_F < 1$

Ainsi $\left\| x \right\|_E = 1 \Rightarrow \left\| f(x) \right\|_F < \frac{2}{\alpha}$ *(i.e. f est bornée sur S)*

Si $x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{\left\| x \right\|_E} \in S \Rightarrow \left\| f\left(\frac{x}{\left\| x \right\|_E} \right) \right\|_F < \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \left\| f(x) \right\|_F < \frac{2}{\alpha} \left\| x \right\|_E$ *(égalité vraie si x=0)*

$(iii) \Rightarrow (iv)$ $\left\| f(x) - f(y) \right\| = \left\| f(x-y) \right\| \leq C \left\| x - y \right\|$

$(iv) \Rightarrow (i)$ *évident*

Notation : On notera $\ell_C(E,F)$ *l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.*

Exemple : Sur E = $\mathbb{R}^2$ *muni de son produit scalaire (espace euclidien), les endomorphismes orthogonaux vérifient* $\left\| u(x) \right\| = \left\| x \right\|$*, ils sont donc continus sur E.*

Contre-exemple : La dérivation sur l'ensemble des polynômes est linéaire mais pas continue

Dem : $E = \mathbb{R}[X]$, $\forall P \in E$, $N(P) = \max\left(\left| a_i \right|, i \in \mathbb{N} \right)$

$D : P \mapsto P',\ D\left(X^n \right) = nX^{n-1} \Rightarrow N\left(D\left(X^n \right) \right) = n$ *or* $N\left(X^n \right) = 1$

On n'aura donc pas $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq K.1$ *donc D n'est pas continue*

Exemple : Soit $E = C^0\left([0,1], \mathbb{R} \right)$ *muni de* $\left\| f \right\|_1 = \int_0^1 \left| f(t) \right| \mathrm{d}t$

On note $T : E \to E$*, telle que* $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue

$E = C^0\left([0,1], \mathbb{R} \right)$ *muni de* $\left\| f \right\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) \right|$, $F = C^1\left([0,1], \mathbb{R} \right)$ *muni de* $N(f) = \left\| f \right\|_\infty + \left\| f' \right\|_\infty$

On note $T : E \to F$*, telle que* $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue

Th : Toute application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un espace vectoriel F est continue.

Dem : Soit $(e_i)_{i=1..n}$ *une base de E,* $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\left\| x \right\|_E = \max_{i=1..n}\left(\left| x_i \right| \right)$

$\forall f \in \ell(E,F)$, $\| f(x)\|_F \leq \|x\|_E \sum_{i=1}^{n} \| f(e_i)\|_F = C\|x\|_E$

Th : Tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est une partie fermée.

Dem : Dans un premier cas on suppose que E est de dimension finie

Soit $(e_i)_{i=1..p}$ *une base de F que l'on complète en une base de E*

$\forall x \in E$, $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, *tel que* $[\![1,p]\!] \subset I$

On définit $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$ *telle que* $\varphi_i(x) = x_i$ *, c'est une forme linéaire continue*

Donc $\varphi_i^{-1}(\{0\})$ *est fermée comme image réciproque d'une partie fermée par une application continue*

$F = \bigcap_{i \in I - [\![1,p]\!]} \varphi_i^{-1}(\{0\})$ *est donc bien une partie fermée de E*

Si la dimension de E n'est pas finie.

Soit x un élément adhérent à F, x est donc la limite d'une suite de points de F, si x n'est pas dans F, on construit l'espace vectoriel $G = F + Vect(\{x\})$*, il est de dimension finie et en appliquant le premier cas F sera fermée donc* $x \in F$

Exemple : L'ensemble des polynômes de degré inférieur à n est une partie fermée de l'ensemble des fonctions continues.

8°) Norme d'une application linéaire continue :

Prop : Si f est une application linéaire continue de E sur F , on a $\sup_{x \in E/\{0\}} \frac{\| f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \| f(x)\|$

Dem : $S = \{x \in E, \|x\| = 1\} \subset E \setminus \{0\}$ *donc* $\sup_{\|x\|=1} \| f(x)\| \leq \sup_{x \in E/\{0\}} \frac{\| f(x)\|}{\|x\|}$

$\forall x \neq 0,\ \frac{x}{\|x\|} \in S$, $\frac{\| f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \| f(x)\| \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\| f(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \| f(x)\|$

On définit sur l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F une norme définie

par : $\|| f \|| = \sup_{x \in E/\{0\}} \frac{\| f(x)\|}{\|x\|}$*. Cette norme s'appelle norme subordonnée ou norme d'opérateur*

Exo : Déterminer la norme d'un projecteur

Prop : On a alors pour tout x de E : $\| f(x)\|_F \leq \|| f \||.\|x\|_E$

Prop : Soit f une application linéaire continue de E dans F et g une application linéaire continue de F dans G , alors gof est une application linéaire continue de E dans G et $\|| gof \|| \leq \|| g \|| \|| f \||$

Dem : $\forall x \neq 0,\ \| gof(x)\| = \| g(f(x))\| \leq \|| g \|| \| f(x)\| \leq \|| g \|| \|| f \||$

cor : Si f est un endomorphisme continue alors : $\|| f^n \|| \leq \|| f \||^n$

Th : L'ensemble des endomorphismes linéaires continues de E un espace vectoriel normé, muni de la norme subordonnée est une algèbre normée unitaire :

$(\ell, +, o)$ *est un anneau,* $(\ell, +, .)$ *est un espace vectoriel*

$\|| 1_\ell \|| = 1$ *et* $\|| fog \|| \leq \|| f \|| \|| g \||$

Rem : Cette notion de norme subordonnée se retrouvera sur les matrices associées aux endomorphismes, elle permet de définir le conditionnement

9°) Continuité d'application bilinéaire

Def : Soit B une application bilinéaire de $E\times E$ *dans F, B est continue s'il existe un réel K strictement positif tel que* $\forall(x,y)\in E^2, \left\|B(x,y)\right\|_F \le K\left\|x\right\|_E\left\|y\right\|_E$

Rem : Le produit scalaire est continue sur $E\times E$ *, en effet* $\left|\langle x,y\rangle\right|\le\|x\|\|y\|$

Rem : On généralise ce résultat au forme multilinéaire

Th : Dans un espace de dimension finie, toutes les applications multilinéaires sont continues
En particulier le déterminant est une application continue

V) Partie compacte d'une espace vectoriel :

1°) Définition et propriétés :

Def : Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, A est partie compacte de E si de toutes les suites de points de A on peut extraire une sous suite convergente dans A. On dit aussi que toute suite de A admet une valeur d'adhérence.

Prop : Si A est une partie compacte de l'espace vectoriel normé E alors A est une partie fermée bornée de E.

Dem : Soit $x\in\overline{A}$*, x est la limite d'une suite* $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *, or A est une partie compacte, donc il existe* φ *telle que* $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *converge dans A, or une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite donc* $x\in A$ *qui est fermée*
Supposons que A ne soit pas bornée, $\forall p\in\mathbb{N}, \exists u_p\in A$ *tel que* $\left\|u_p\right\|\ge p$ *, or A est une partie compacte, donc il existe une application* φ *telle que* $\left(x_{\varphi(p)}\right)$ *converge dans A, mais* $\left\|u_{\varphi(p)}\right\|\ge\varphi(p)\ge p$ *. Ce qui est impossible pour une suite convergente donc A est bornée*

Prop : Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Dem : Soit $(x_n)\in B^{\mathbb{N}}$*, or* $B\subset A$ *, qui est compact, il existe donc* φ *telle que* $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *converge dans A, mais cette suite est dans B qui est fermée donc sa limite appartient à B.*
B est donc une partie compacte

Prop : Une suite d'une partie compacte est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Dem : $(\Rightarrow)$ *Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence car toutes les suites extraites d'une suite convergente convergent vers la même limite*
$(\Leftarrow)$ *On procède par contraposée, soit* $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *qui diverge, comme A est une partie compacte alors cette suite admet une valeur d'adhérence a dans A, or la suite diverge, donc elle ne converge pas vers a,* $\exists\varepsilon>0$ *tel que* $\forall n\in\mathbb{N}, \exists n_0$ *tel que* $n_0>n$ *et* $\left\|u_{n_0}-a\right\|\ge\varepsilon$ *.*
On construit donc une suite de A qui admettra une valeur d'adhérence $b\neq a$ *. Or cette suite est aussi extraite de la suite* $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *qui admet donc 2 valeurs d'adhérence distinctes.*

Prop : Si $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ *est un espace vectoriel normé produit, et si pour tout i entier entre 1 et p,* A_i *est une partie compacte de* E_i *alors* $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_p$ *est une partie compacte de E.*

Dem : On effectue la démonstration pour $p = 2$

$\left(a_{1,n}\right) \in A_1^{\mathbb{N}}, \left(a_{2,n}\right) \in A_2^{\mathbb{N}}, \exists \varphi_1$ *telle que* $\left(a_{1,\varphi_1(n)}\right)$ *converge vers* $a_1 \in A_1$ *alors* $\left(a_{2,\varphi_1(n)}\right) \in A_2^{\mathbb{N}}$ *donc* $\exists \varphi_2$ *telle que* $\left(a_{2,\varphi_2 o \varphi_1(n)}\right)$ *converge vers* $a_2 \in A_2$

Soit alors la suite $a_n = \left(a_{1,n}, a_{2,n}\right) \in \left(A_1 \times A_2\right)^{\mathbb{N}}$

On pose $\phi = \varphi_2 o \varphi_1$ *ainsi la suite* $\left(a_{\phi(n)}\right)$ *converge vers* $\left(a_1, a_2\right)$

Th : Soit A une partie compacte de E, si f est une application continue de E sur F alors $f(A)$ *est une partie compacte de F.*

Dem : $\left(y_n\right) \in \left(f(A)\right)^{\mathbb{N}} \Rightarrow \exists \left(x_n\right) \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $y_n = f\left(x_n\right)$ *or A est une partie compacte donc il existe* φ *telle que* $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *converge vers* $x \in A \Rightarrow y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *converge vers* $y = f(x)$ *car f est continue, or* $y \in f(A)$ *qui est donc bien compacte*

Conséquence : (Th de Weierstrass)
A une partie compacte de E, si f est une application continue de A, alors f est bornée et elle atteint sa borne supérieure. (ie : $\exists a \in A$*, tel que* $\left\| f(a) \right\| = \sup\limits_{x \in A} \left(\left\| f(x) \right\| \right)$ *)*

Dem : Comme f est continue alors $f(A)$ *est une partie compacte de F, donc une partie bornée, ainsi f est bornée, notons* α *sa borne supérieure sur A, il existe alors une suite* $\left(a_n\right)$ *de A telle que* $\left(\left\| f\left(a_n\right) \right\| \right)$ *converge vers* α *par la caractérisation de la borne supérieure, or A est compacte, donc il existe* φ *telle que* $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ *converge vers a dans A, par continuité on aura* $\left(\left\| f\left(a_{\varphi(n)}\right) \right\| \right)$ *qui converge vers* $\left\| f(a) \right\|$ *et vers* α *comme suite extraite d'une suite convergente, ainsi* $\left\| f(a) \right\| = \alpha$

L'image d'une partie compacte par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ *est un segment*

2°) Continuité uniforme :

Def : f une application de E dans F est uniformément continue sur I si et seulement :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ *tel que* $\forall (x, y) \in I, \left\| x - y \right\|_E < \eta \Rightarrow \left\| f(x) - f(y) \right\|_F < \varepsilon$

Prop : Les fonctions Lipschitziennes sur I sont uniformément continues sur I.

Prop : Toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Th de Heine : (1821-1881)
Une fonction continue sur une partie A compacte de E y est uniformément continue.

Dem : Par contraposée

Si f n'est pas uniformément continue alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ *tel que* $\forall \mu > 0, \exists (x, y)$ *tel que* $\left\| x - y \right\| < \mu$ *et* $\left\| f(x) - f(y) \right\| \geq \varepsilon_0$

Prenons $\mu = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*, on construit ainsi un couple de 2 suites*

$(x_n, y_n) \in A^2$ tel que $\|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$

Or A^2 *est une partie compacte* $\exists \varphi$ *telle que* $\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right)$ *converge vers* $(a,b) \in A^2$, *cependant* $\left\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right\| < \dfrac{1}{\varphi(n)+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ *donc* $a = b$, *les suites* $f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *et* $f\left(y_{\varphi(n)}\right)$ *convergent donc vers* $f(a) = f(b)$ *ce qui est impossible car* $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varepsilon_0$

3°) Le cas de la dimension finie :

Th de Bolzano-Weierstrass (1781-1848 et 1815-1897)
De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente (MPSI)
Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.

Dem : Version MPSI

Soit une suite (x_n) *de réels bornée,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$

Soit $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, *si X est fini alors la suite est stationnaire ou ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite convergente*

Si X est infini, on pose alors $I_0 = [a,b]$ *et* $I_n = [a_n, b_n]$ *par récurrence, en supposant que* I_{n-1} *contient une infinité d'éléments de X, puis* $c_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$

On choisit alors celui des deux $[a_{n-1}, c_n]$ *ou* $[c_n, b_{n-1}]$ *qui contient une infinité d'éléments de X . Ainsi* $I_n \subset I_{n-1}$ *et chaque intervalle a pour longueur* $\dfrac{b-a}{2^n}$

Par le procédé de dichotomie $\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$

Soit $x_0 \in I_0$, *et pour tout n* $\exists x_{\varphi(n)} \in I_n$ *car cet intervalle contient une infinité d'éléments de X, de même on peut choisir parmi cette infinité* $\varphi(n+1) > \varphi(n)$

On construit ainsi une sous suite qui converge vers x

Dem :Version MP : Soit A une partie fermée et bornée de E, et $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(e_j)_{j=1..p}$ *une base de E et on aura alors* $u_n = \sum_{j=1}^{p} u_{j,n} e_j$ *or A est bornée* $\Rightarrow \forall j \in [\![1, p]\!]$, $|u_{j,p}| \leq M$ *(on a p suites de réels bornées)*

$(u_{1,n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\exists \varphi_1$ *telle que* $\left(u_{1,\varphi_1(n)}\right)$ *converge vers* $a_1 \in \mathbb{R}$, *alors* $\left(u_{2,\varphi_1(n)}\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *donc* $\exists \varphi_2$ *telle que* $\left(u_{2,\varphi_2 o \varphi_1(n)}\right)$ *converge vers* $a_2 \in \mathbb{R}$, *on réitère p fois.*

On pose $\phi = \varphi_p o....o\varphi_1$ *ainsi les suites* $\left(a_{j,\phi(n)}\right)$ *convergent vers* a_j

Et donc la suite $\left(u_{\phi(n)}\right)$ *converge vers* $a = \sum_{j=1}^{p} a_j e_j \in \overline{A} = A$ *car A est fermée*

Rem : Il existe un théorème (de Riesz) qui affirme
Un espace E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est une partie compacte de E

Conséquence : Les compacts de $\mathbb{R}$ *sont les fermés bornés.*

Exemple : $[0,1] \times \{5\}$ *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^2$

Exo : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $S=\{x\in E,\|x\|=1\}$. *Montrer que S est une partie compacte de E.*

Th : Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Dem : Soit N une norme, montrons que N est équivalente à $\| \ \|_\infty$

$(e_i)_{i=1..p}$ *une base de E et* $\forall x\in E$, $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$

$N(x)=N\left(\sum_{i=1}^{p}x_ie_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}|x_i|N(e_i)\leq\|x\|_\infty\sum_{i=1}^{p}N(e_i)$, *si on pose* $\beta=\sum_{i=1}^{p}N(e_i)$

$\forall x\in E,\ N(x)\leq\beta\|x\|_\infty$, *il reste à justifier l'existence de* $\alpha>0$, $\forall x\in E,\ \alpha\|x\|_\infty\leq N(x)$

Par l'absurde on suppose que $\forall\alpha>0,\ \exists x\in E$ *tel que* $\alpha\|x\|_\infty>N(x)$

Prenons $\alpha=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\exists(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\frac{1}{n+1}\|x_n\|_\infty>N(x_n)$, *on en déduit que* $x_n\neq0$

On considère alors $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$, *ceci définit une suite de la sphère unité qui est une partie fermée bornée de E donc une partie compacte de E, il existe donc* φ *telle que* $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ *converge vers L dans S*

$\Rightarrow\left\|y_{\varphi(n)}-L\right\|_\infty\leq\varepsilon$

Or $\left|N\left(y_{\varphi(n)}\right)-N(L)\right|\leq N\left(y_{\varphi(n)}-L\right)\leq\beta\left\|y_{\varphi(n)}-L\right\|_\infty\to0$

Ainsi $\lim_{n\to\infty}N\left(y_{\varphi(n)}\right)=N(L)>0$ *car* $L\in S$ ($\|L\|_\infty=1$)

Or $N\left(y_{\varphi(n)}\right)=\frac{N\left(x_{\varphi(n)}\right)}{\left\|x_{\varphi(n)}\right\|_\infty}<\frac{1}{\varphi(n)+1}\to0$ *ce qui est impossible*

<u>***VI) Parties connexes par arcs :***</u>

<u>*1°) Définitions :*</u>

Def : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E, on appelle chemin dans A toute application continue de $[0,1]$ *dans A, on appelle arc toute image d'un chemin.*

Soit $a=f(0)$ *et* $b=f(1)$, *a et b sont respectivement l'origine et l'extrémité de l'arc.*

Def : Une partie A est connexe par arcs dans E si pour tout a et b de A, il existe un arc d'origine a et d'extrémité b contenu dans A.

Prop : Une partie A convexe de E est connexe par arcs dans E.

<u>*2°) Propriétés :*</u>

Prop : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, f une application continue de E dans F, A une partie connexe par arcs dans E, alors $f(A)$ *est une partie connexe par arcs dans* F

Dem : Soit $(c,d)\in(f(A))^2$ *donc* $\exists(a,b)\in A^2,\ f(a)=c,\ f(b)=d$ *comme A est connexe il existe u continue sur* $[0,1]$ *telle que* $u(0)=a$, $u(1)=b$ *et* $u([0,1])\subset A$

On pose alors $v=f o u$, *v est continue et* $v(0)=c,\ v(1)=d$ *et* $v([0,1])\subset f(A)$

Exemple : Les parties convexes ou étoilées sont des parties connexes par arcs

Def : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ *si* $\forall(x,y)\in I^2$ *tel que* $x<y, [x,y]\subset I$

Exemple : $\mathbb{R}^*$ *n'est pas un intervalle*

Th : Les parties connexes dans $\mathbb{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbb{R}$.

Dem : Si I est un intervalle, alors $\forall(x,y)\in I^2$, *on pose la fonction f de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(t)=ty+(1-t)x$, *alors* $f(0)=x,\ f(1)=y$ *et* $f([0,1])=[x,y]\subset I$. *Alors I est connexe.*

Réciproquement :

Soit C une partie connexe de $\mathbb{R}$, *donc on considère* $(a,b)\in C^2$ *tel que* $a<b$

Montrons que tout élément x de $[a,b]$ *appartient à C*

On considère la fonction f continue sur $[0,1]$ *telle que* $f(0)=a$ *et* $f(1)=b$

<u>Version1</u> : f est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0\in[0,1]$ *tel que* $f(t_0)=x$. *Donc* $x\in C$ *qui est donc bien un intervalle*

<u>Version2 :</u> (on démontre en réalité le TVI)

Soit $A=\{t\in[0,1],\forall y\in[0,t],\ f(y)<x\}$, *comme f est continue en* 0, *A n'est pas vide et majorée par* 1, *donc A admet une borne supérieure notée* t_0 *(montrons que* $f(t_0)=x$ *)*

$t_0-\dfrac{1}{n+1}<t_0\Rightarrow\exists(t_n)\in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $t_0-\dfrac{1}{n+1}<t_n<t_0$ *ainsi* $t_n\to t_0$ *et* $f(t_n)\to f(t_0)$

Or $f(t_n)<x\Rightarrow f(t_0)\le x$

On suppose $f(t_0)<x$, *on pose* $\varepsilon=\dfrac{x-f(t_0)}{2}>0$

Il existe alors $\alpha>0$ *tel que* $\forall y\in\,]t_0-\alpha,t_0+\alpha[\,,\ |f(y)-f(t_0)|<\varepsilon$ *(f est continue)*

Or $]f(t_0)-\varepsilon,f(t_0)+\varepsilon[\,\subset\,]f(t_0)-\varepsilon,x[$ *ce qui contredit le fait que* $t_0=\sup(A)$

Finalement $f(t_0)=x$ *donc x est élément de C qui est donc bien un intervalle*

Exo : $O_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}),\ \text{telle que}\ A^tA=I_n\}$ *est-elle une partie connexe de* $M_n(\mathbb{R})$ *?*