Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap A1 : Exercices vus en classe ou à faire

I) Normes

Exo1 :

Pour $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $N(x,y)=\int_0^1|x+ty|\,\mathrm{d}t$ *, montrer que N est une norme sur* $\mathbf{R}^2$*. Dessiner* $B_F(0,1)$

Exo2 :

Pour $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $N(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x+ty|$ *, montrer que N est une norme sur* $\mathbf{R}^2$*.Dessiner* $B_F(0,1)$

Exo3 :

Soit $E=\mathbb{R}^2$*, pour* $x=(a,b)$, $N(x)=\sqrt{a^2+2ab+5b^2}$ *, montrer que N définit une norme sur E.*

Exo4 :

Soit $E=C^1([0,1],¡\,)$*, on note pour tout f de E,* $N(f)=\|f'\|_\infty+|f(0)|$

Montrer que N est une norme sur E, est-elle équivalente à $\|\ \|_\infty$ *?*

Exo5 :

Pour $f\in C^1([0,1],\mathbf{R})$*, on pose* $N(f)=\left[f^2(0)+\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$

Montrer que N est une norme sur $E=C^1([0,1],\mathbf{R})$.

N et $\|\ \|_\infty$ *sont-elles équivalentes ?*

Exo6 :

Soit N : $\mathbb{C}[X]\to\mathbb{R}$*, telle que* $\forall P\in\mathbb{C}[X], N(P)=\sup_{|z|=1}|P(z)|$*, montrer que N est une norme sur* $\mathbb{C}[X]$.

Exo7 :

On note E l'espace des applications de classe C^1 *sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

On pose pour f appartenant à E, $\|f\|=|f(0)|+2\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ *et* $\|f\|'=2|f(0)|+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t$

Montrer que $\|\ \|$ *définit une norme sur E (de même* $\|\ \|'$ *sera aussi une norme)*

Montrer que $\|\ \|$ *et* $\|\ \|'$ *sont équivalentes.*

Toutes les normes de E sont-elles équivalentes à $\|\ \|$ *?*

Exo8 :

Soit $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$*, on note pour tout f de E,* $N(f)=\|f'\|_\infty+|f(0)|$

On sait que N est une norme sur E (exo 4)

Soit $N'(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ *montrer que c'est aussi une norme sur E, est-elle équivalente à N ?*

Exo9 :

Soit E l'ensemble des suites u réelles bornées telles que $u_0=0$

On considère $N_\infty(u)=\sup_n|u_n|$ *et* $N(u)=\sup_n|u_{n+1}-u_n|$

1. Justifier que N est une norme sur E

2. $\forall q\in\,]0,1[$*, on considère la suite u telle que* $u_{n+1}-u_n=q^n$ *avec* $u_0=0$

Montrer que u est élément de E

3. Justifier l'existence de $\beta>0$ *tel que* $\forall u\in E,\ N(u)\le\beta N_\infty(u)$

4. Les normes N et N_∞ *sont-elles équivalentes ?*

Exo10 :

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$*, pour tout polynôme P de E on note* $N(P) = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)|$

Montrer que N est une norme sur E

II) Suites dans un evn

Exo11 :

Soit une suite (u_n) *telle que* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$*. Montrer que* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n} = 0$

Exo12 :

$\forall(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$*, on note deux suites définies par* $x_0 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ *et* $y_0 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$

Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite

Exo 13 :

Etudier la convergence des suites réelles suivantes : $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ *et* $b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$

Exo14 :

Soit la suite $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$

On définit $v_n = (-1)^n u_n$ *et* $w_n = v_n - v_{n-1}$

Montrer que (w_n) *est géométrique, en déduire l'expression de* u_n *en fonction de n*

Exo15 :

Soit la suite (q_n) *réelle croissante telle que* $q_0 \geq 2$ *et* $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 q_1 \ldots q_k}$

Montrer que la suite (u_n) *est convergente*

Exo16 :

Soit $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$*, discuter suivant les valeurs de a et b la nature de cette suite*

Exo17 :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, montrer que cette suite diverge.*

Montrer que pour tout k entier non nul, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

En déduire que la suite définie par $U_n = S_n - \ln(n)$ *est convergente.*

Exo18 :

Soient deux suites $x_0 = 0, y_0 = 2, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n+1}}$

Montrer que $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ *et* $y_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ *, déterminer la nature de la suite* (y_n)

Exo19 :

Etudier la nature de la suite définie par $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$

Exo20 :

Dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$*, quelle est la limite de la suite* (u_n) *définie par* $u_n : t \mapsto t^n(1-t)^n$ *?*

Exo21 :

Montrer que si $a_n \sim b_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$ *alors* $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$

Montrer que si $a_n \sim b_n$ alors $(a_n)^{\frac{1}{n}} \sim (b_n)^{\frac{1}{n}}$

Exo22 :

Donner un équivalent de $\ln(n!)$ (on fera 2 démonstrations différentes)

Exo23 :

Calculer I_n en fonction de n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$, donner le résultat sous forme de factoriels

Exo24 :

Etudier les suites définies par

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 0,\ u_1 = 1$

$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1,\ u_1 = 1$

$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1,\ u_1 = 1$

Exo25 :

Soit F l'ensemble des suites (u_n) définies par

$u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_2 = c$ et $u_{n+3} = -3u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n \ \forall n \geq 0$

Montrer que F est un espace vectoriel de dimension 3

Exprimer tout élément de F en fonction de a, b et c

Exo26 :

On pose $u_0 = a$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, si $a \in]1,2[$, étudier la nature de la suite

Exo27 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in]0,\pi[$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $\forall n > 0$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite

Montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a : $u_n - u_{n+1} \sim \frac{{u_n}^3}{6}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite. Quelle est la limite de la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n{u_{n+1}}^2}$?

Exo28 :

On note $mil(a,b,c)$ le réel parmi a, b et c qui est entre les deux autres

Soit la suite (u_n), $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \int_0^1 mil\left(u_n, t, \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$. Etudier cette suite.

Exo29 :

On considère la suite (u_n) telle que $(u_{2n}),(u_{2n+1}),\ (u_{3n})$ convergent

Montrer que la suite (u_n) converge.

Exo30 :

Etudier la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$

Exo31 :

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$

Exo32 :

Etudier la suite définie par $u_0 = u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}}$

Exo33 :

Montrer que $\forall k \in [\![0,2n]\!], \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$

Exo34 :

Soit la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ *et* $u_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}u_n}}$

Exo35 :

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Montrer que la suite tend vers $+\infty$

Calculer $w_n = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}$ *, on pourra exprimer* w_{n+1} *en fonction de* w_n

Soit $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$*, étudier la monotonie des suites* (v_{2n}) *et* (v_{2n+1})*, en déduire la convergence de la suite* (v_n) *vers* $L \in \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}\right]$

Exprimer v_{n+1} *en fonction de* v_n*, en déduire la valeur exacte de L*

Exo36 :

Etudier la suite (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

Exo37 :

Soit une suite (u_n) *de réels positifs qui converge vers 0. Montrer qu'il existe une suite* (d_n) *décroissante de limite nulle telle que pour tout n on ait* $0 \le u_n \le d_n$

Exo38 :

Soit la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$*, montrer que* (I_n) *converge vers* 1

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x = 0$

Montrer que $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exo39 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 > 0,\ u_1 > 0,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_nu_{n-1}}$

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{{u_{n+1}}^2} - \dfrac{1}{{u_n}^2}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente et préciser sa limite*

Exo40 :

On considère la suite définie par $u_0 = 1 et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_{\left[\frac{n}{2}\right]} + u_{\left[\frac{n}{3}\right]} + u_{\left[\frac{n}{6}\right]}$ *où* $[x]$ *désigne la partie entière de x. Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \le u_n \le 2n+1$

Exo41 :

Etudier la convergence de la suite (a_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $a_n = \sqrt[n]{n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{\theta}{k}\right)}$ *où* $\theta \in \left]0, \pi\right[$

Exo42 :

Soit une suite (u_n) *arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0u_{n+1}}$

Exo43 :

Soit une suite (u_n) *telle que* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$*. Déterminer la limite de* u_n

Exo44 :
Soit une suite de réels (u_n) *telle que* $u_{n+1} - u_n = o(1)$
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle
Exo45 :
Soit E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\| = sup(|u_n|, n \in \mathbb{N})$
Déterminer la distance de la suite $u_n = (-1)^n$ *au sous espace des suites convergentes*

III) et IV) Topologie et continuité

Exo46 :
On munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme* $\| \ \|_\infty$. *On note p l'application de* $\mathbb{R}^2$ *telle que* $p(x,y) = x$.
Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, *montrer que* $p(O)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$
Exo47 :
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\| \ \|_\infty$. *On définit* $A = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$
Montrer que A est un ouvert de E
Exo48 :
Soit A un ouvert de E et B une partie de E , montrer que $A + B$ *est un ouvert de E*
Exo49 :
Soit F un sous espace vectoriel de E, montrer que si l'intérieur de F n'est pas vide alors F est confondu avec E
Exo50 :
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\| \ \|_\infty$. *On note* $A = \left\{ f \in E, f(0) = 0, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1 \right\}$
Montrer que A est une partie fermée de E.
Exo51 :
$I = [0,1]$, $\Gamma(I) = \{f \in C(I), f(0) = f(1) = 0\}$
On munit $C(I)$ *de la norme de la convergence uniforme* $N_\infty(f) = \sup_{t \in I} |f(t)|$
Montrer que $\Gamma(I)$ *est un fermé de* $C(I)$
Exo52 :
On désigne par p_1 *et* p_2 *les applications de* $\mathbb{R}^2$ *définies par* $p_1(x,y) = x$ *et* $p_2(x,y) = y$
Montrer que si F est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ *telle que* $p_2(F)$ *soit bornée alors* $p_1(F)$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}$
Exo53 :
Soit E un espace vectoriel normé. A un ouvert de E et B une partie de E
Montrer que $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$
Exo54 :
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $M_n(\mathbb{R})$
Exo55 :
Soient f et g deux applications continues de E dans E, E étant un espace vectoriel normé. Soit $A = \{x \in E, f(x) = g(x)\}$, *montrer que A est une partie fermée de E*
Exo56 :
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$
Si $A \subset E$, *on note* $A^\perp = \{x \in E, \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A\}$. *Montrer que* $\left(\overline{A}\right)^\perp = A^\perp$
Exo57 :
A une partie de E, montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$
Exo58 :
L'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel E forme une partie fermée de $\ell(E)$

Exo59 :

$\left(E,\langle\,,\rangle\right)$ *est un espace euclidien, soit a un élément de E.*

Montrer que $f: x\mapsto\langle a,x\rangle$ *est continue sur E*

Exo60 :

On note $\left(E,\|\ \|\right)$ *un espace vectoriel normé euclidien*

Montrer que $A=\left\{(x,y)\in E^2 \text{ tel que } (x,y) \text{ est libre}\right\}$ *est un ouvert de* E^2

Exo61 :

On désigne par $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$*, on munit E des deux normes classiques*

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \text{ et } \|f\|_2=\left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour toute partie A de E on note $\overline{A}^\infty$ *et* $\overline{A}^2$ *les adhérences de A selon les normes* $\|\ \|_\infty$ *et* $\|\ \|_2$

Montrer que $\overline{A}^\infty\subset\overline{A}^2$

Exo62 :

Soient A et B deux parties fermées disjointes d'un espace vectoriel normé E

Déterminer une fonction f continue sur E dans $\mathbb{R}$ *telle que :* $f/_A=0$ *et* $f/_B=1$

Exo63 :

Soit F un sous espace vectoriel de E, montrer que son adhérence est aussi un sous espace vectoriel

Exo64 :

Soit A une partie convexe de E montrer que son adhérence est aussi convexe

Montrer que son intérieur est convexe

Exo65 :

Soit f une fonction continue de E sur E, montrer que $\Gamma=\left\{(x,f(x)),x\in E\right\}$ *est une partie fermée de* $E\times E$

Exo66 :

Soit une fonction continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x)$*. Montrer que f est une fonction constante*

Exo67 :

On considère les fonctions continues f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ *telles que pour tout* $(x,y)\in\mathbf{R}^2$

$$f(x+y)f(x-y)=\left(f(x)\right)^2\left(f(y)\right)^2$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$

Montrer que si $f(0)=0$ *alors f est la fonction nulle*

Montrer que si $f(0)\neq 0$ *alors* $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)\neq 0$

On se place donc, maintenant dans le cas où $f(0)\neq 0$

Pour tout entier naturel n , exprimer $f(nx)$ *en fonction de* $f(x)$ *et de n .*

On notera alors $a=f(1)$ *, exprimer* $f(n),\forall n\in\mathbb{Z}$ *, puis* $f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$

Exo68 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que $\|\ \|$ *est une norme sur* $M_n(\mathbf{R})$ *telle que :*

$\forall A\in M_n(\mathbb{R}),\forall P\in GL_n(\mathbb{R}): \|P^{-1}AP\|=\|A\|$

Montrer que $\forall(A,B)\in\left(M_n(\mathbf{R})\right)^2$: $\|BA\|=\|AB\|$*. Est ce possible ?*

Exo69 :

Soit E un espace vectoriel normé.On suppose que U et V sont deux ouverts denses dans E

Montrer que $U\cap V$ *est encore un ouvert dense dans E*

(ce qui signifie qu'un espace vectoriel normé est un espace de Baire)

Exo70 :

Soit l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, *on note pour tout P de E*

$N(P)=\sum_{i=0}^{d^\circ(P)}|a_i|$, *vérifier que N définit une norme sur E. Soit* $u_i(P)=P^{(i)}(0)$, *montrer que ceci définit une forme linéaire continue sur E .*

Exo71 :

$E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$, *on définit l'opérateur T par :*

$T: E\to\mathbb{R}, tel\ que\ T(f)=\int_0^1 f(t)dt$. *Montrer que T est continue et calculer* $|||T|||$

Exo72 :

$E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$, *on définit l'opérateur T par :*

$T:E\to E$, *tel que* $T(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall x\in[0,1]$. *Montrer que T est continue et calculer* $|||T|||$

Exo73 :

$E=C^0([0,1],\mathbb{R}), \|f\|_2=\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$. *On note* $\forall\varphi\in E, T_\varphi(f)=\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T_φ *est continue et calculer* $|||T|||$

Exo74 :

E un espace vectoriel de dimension finie, f une forme linéaire de E, H son noyau.
Peut-on avoir H dense dans E ?

Exo75 :

Soit $E_\infty=C^0([0,1],¡\ )$ *muni de* $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$

On note $T:E_\infty\to E_\infty$, *tq* $\forall f\in E,\forall x\in[0,1]$, $T(f)(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue et calculer $|||T|||$

Soit $E_\infty=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Puis $E_1=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$

On note $T:E_\infty\to E_1$, *tq* $\forall f\in E,\forall x\in[0,1]$, $T(f)(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue et calculer $|||T|||$

Exo76 :

Soit un espace vectoriel normé $(E,\| \ \|_E)$ *et* $\ell^\infty(E)$ *l'ensemble des suites bornées d'éléments de E,*
$\forall u\in l^\infty(E)$, $\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_E$

$\varphi:\ell^\infty\to\ell^\infty$ *tq* $\varphi(u)=v$ *et* $v_n=u_{n+1}-u_n$. *Montrer que* φ *est continue*

$T:\ell^\infty\to\ell^\infty$ *tq* $T(u)=S$ *et* $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$. *Montrer que T est continue*

Exo77 :

Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$

On a aussi $F=C^1([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $N(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$

On note $T:E\to F$, *telle que* $\forall f\in E,\forall x\in[0,1]$, $T(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue et calculer $\|T\|$

Exo78 :

Soit f une application linéaire de E dans F telle que pour toute suite (x_n) *de E tendant vers 0, la suite* $(f(x_n))$ *est bornée. Montrer que f est continue sur E*

Exo79 :

Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$*, on note* $N_P(X) = \|PX\|_\infty, \forall X \in \mathbb{R}^n$

Vérifier que N_P *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$

On définit alors $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |||A|||_P = \sup_{X \neq 0} \frac{N_P(AX)}{N_P(X)}$. *Montrer que* $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||$

Exo80 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to E$ *une application telle qu'il existe* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ *tel que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$

Montrer que f admet un point fixe et un seul

(pour l'existence, on introduira une suite (x_n) *de E telle que* $x_{n+1} = f(x_n)$*, on montrera que cette suite converge et que sa limite est point fixe de f)*

Exo81 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$

Soit f une fonction de E, pour tout $x \in [0,1]$ *on pose* $u(f)(x) = \int_0^1 \inf(x,t) f(t) dt$

Montrer que $u(f) \in E$ *(on pourra montrer que* $u(f)$ *est de classe* C^1 *sur* $[0,1]$*)*

Montrer que l'application u : $f \mapsto u(f)$ *est un endomorphisme de E*

On munit E de la norme $\| \|_\infty$

Montrer que u est continue sur E

Déterminer le noyau de u (on pourra dériver deux fois $u(f)(x), \forall x \in [0,1]$ *)*

V)VI) Partie compacte et connexe

Exo82 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$*, montrer que A est bornée si et seulement si son adhérence est compacte*

Exo83 :

Soit $(E, \| \|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie*

A une partie de E, on définit $\forall x \in E,\ d(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|$

Montrer que l'application qui à x associe $d(x, A)$ *est continue*

Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

Soient K et L deux compacts de E, on définit l'application :

δ *telle que* $\delta(K, L) = \sup_{x \in E} |d(x, K) - d(x, L)|$

Montrer que δ *définit une distance sur l'ensemble des parties compactes de E*

Exo84 :

Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices orthogonales est une partie compacte de* $M_n(\mathbf{R})$

Exo85 :

Soient A et B deux parties compactes de E. Montrer que A+B est aussi une partie compacte de E

Exo86 :

Soient A une partie compacte et B une partie fermée, montrer que $A + B$ *est une partie fermée de E*

Exo75 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $S=\{x\in E, \|x\|=1\}$. *Montrer que S est une partie compacte de E*

Exo88 :

Montrer que la fonction $x\to\sqrt{x}$ *est uniformément continue sur* $[1,+\infty[$

Exo89 :

L'ensemble des matrices orthogonales est-il une partie connexe par arcs ?

Exo90 :

Soient E un espace vectoriel normé, F est une partie fermée de E et K une partie compacte de E. Montrer que F + K est une partie fermée de E

Exo91 :

Soit $F(x)=\int_1^2 \sin\left(\frac{x}{t^2}\right)\ln(t)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que f est uniformément continue sur* $\mathbf{R}$

Exo92 :

Montrer que la fonction $f: x\mapsto \sin(x^2)$ *n'est pas lipschitzienne sur* $[1,+\infty[$

Montrer que la fonction $f: x\mapsto \sin(\sqrt{x})$ *est lipschitzienne sur* $[1,+\infty[$

Exo93 :

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *continue admettant une limite nulle à l'infini*

Montrer que f est uniformément continue

Exo94 :

Que peut on dire de la limite d'une suite de polynômes de degré inférieur à 3 ?

Exo95 :

Soit A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$ *telle que la suite* (A^k) *converge vers une matrice B.*

Que dire de B ?

Exo96 :

Soit A et B deux parties de E, on note $d(A,B)=\inf_{(x,y)\in A\times B}\|x-y\|$. *Montrer que* $d(\overline{A},\overline{B})=d(A,B)$

Exo97 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on note* $\Gamma_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } x\in\mathbb{R}\}$

Montrer que si f est continue alors Γ_f *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^2$

On suppose f bornée et que Γ_f *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^2$, *montrer que f est continue*

Exo98 :

On note $(E,\|\ \|)$ *un espace vectoriel normé*

Soit K une partie compacte non vide de E, et f une fonction de K dans K telle que

$\forall(x,y)\in K^2,\ x\neq y\Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$

Montrer que f admet un unique point fixe c dans K

Exo99 :

Soit $(E,\|\ \|)$ *un espace vectoriel normé de dimension supérieur à 2*

Montrer que $S=\{x\in E, \|x\|=1\}$ *est une partie connexe de E*

Exo100 :

Soit K une partie compacte de $\square^n$ *et* $\varepsilon>0$.*Montrer que l'on peut trouver un sous ensemble fini A de K tel que* $K\subset\bigcup_{a\in A}B_F\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ *(on pourra procéder par l'absurde)*

Exo101 :

E est un espace vectoriel normé, K et L désignent deux parties compactes de E.

Montrer que la fonction : $x\mapsto d(x,K)-d(x,L)$ *est bornée sur E*