

Chap A2 : Fonctions vectorielles

Rappels de MPSI (les démonstrations sont en annexe)

On considère l'ensemble de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1°) Quelques théorèmes :

Exo : Pour tout entier n non nul on note le polynôme P_n tel que $P_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-i)$

Montrer que pour tout n , P'_n admet exactement n racines

Th de Rolle (1652-1719) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Th des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Autre version :

Si f est C^1 sur un voisinage V de x , si $x+h \in V$ alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$

Conséquence : l'inégalité des accroissements finis

Si f' est bornée sur I alors $\forall (x, y) \in I^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in I} \|f'(t)\| \cdot |x - y|$

On peut donc affirmer que f est Lipschitzienne

2°) La classe C^p :

Def : f est de classe C^p si f est p fois dérivable et si sa dérivée p -ième est continue.

Th : la formule de Leibniz (1646-1716)

Si f et g sont de classe C^p sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors le produit fg l'est aussi et

$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$$

Exo : Soit f définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$, montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right)$

Exo : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1} \ln(x)$.

Montrer que $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$

Def : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ de I dans J est un C^p -difféomorphisme de I sur J si

φ est bijective

φ est de classe C^p sur I

φ^{-1} est de classe C^p sur J

Ex : $x \mapsto \ln(x)$ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$

Th : L'application φ de classe C^p induit un C^p difféomorphisme de I sur $\varphi(I)$ si et seulement si pour tout t de I on a $\varphi'(t) \neq 0$

Exo : Déterminer un DL à l'ordre 3 en 0 de la réciproque de $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$

3°) La convexité :

*Def : Une fonction réelle est dite convexe sur I si pour tout $(x, y) \in I^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
(la sécante est toujours située au dessus de la courbe)*

Def : f est dite concave si sa fonction opposée est convexe.

Exo : Soit f une fonction convexe sur I , $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } x \in I, y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$

Th : Si f est C^1 sur I alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I

Th : Si f est C^2 sur I alors f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$

Exo : Soit $(x_i)_{i=1..n}$ une famille de réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$

Th : Inégalité de Jensen : Si f est une fonction convexe sur I , soient $(x_i)_{i=1..n} \in \mathbb{R}^n$

$$\forall (\lambda_i)_{i=1..n} \in [0, 1]^n \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Inégalité de convexité à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ et on en déduit que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$$

1) Dérivation des fonctions d'une variable réelle :

I un intervalle de $\mathbb{R}$, f est définie sur I à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie E .

1°) Dérivée en un point et fonction dérivée :

Def : Soient x_0 un point de I et f une fonction définie sur I , f est dérivable en x_0 si l'application $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$. Lorsque cette limite existe on l'appelle vecteur dérivé de f en x_0 , noté $f'(x_0)$.

Def : Si l'application $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet des limites finies lorsque $x \rightarrow x_0^+$ et $x \rightarrow x_0^-$, mais que ces limites sont différentes, on dit que f est dérivable à droite et à gauche, mais non dérivable en x_0

Exemple : La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0

Prop : Soit $(e_i)_{i=1..n}$ une base de E , on note $(f_i)_{i=1..n}$ les n applications coordonnées de f , donc $\forall x \in I, f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si ses applications coordonnées sont dérivables en a . Et on a $f'(a) = \sum_{i=1}^n f_i'(a)e_i$

Dans le cas de fonctions complexes, f est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables.

Par exemple : $(e^{ix})' = ie^{ix}$, mais aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{C}, (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$

Exo : Soit f définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$, déterminer $f^{(n)}(x)$

On utilisera $\sin(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$

Th : f est dérivable en x_0 si et seulement si $\forall h \in V(0), f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$

Prop : Si f est dérivable en x_0 alors elle y est continue.

Def : Une fonction est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I , on note alors f' la fonction qui à tout élément de I associe son vecteur dérivé.

Rem : Si f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f'$ admet une limite en x_0 : ceci est FAUX !

(voir l'exemple $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(0) = 0$)

2°) Opérations sur les fonctions dérivables :

Prop : L'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E est un espace vectoriel et $\forall x \in I, (\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$

Prop : Soient I et J deux intervalles réels, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}, f : I \rightarrow E$ telles que $\varphi(J) \subset I$

Si φ est dérivable sur J et f est dérivable sur I alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'(\varphi(a))$

Dem : φ est dérivable en a donc $\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + o(h)$

f est dérivable en $b = \varphi(a)$ alors $f(b+k) = f(b) + kf'(b) + o(k)$

On pose $k = \varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a) + o(h)$

$f \circ \varphi(a+h) = f(\varphi(a+h)) = f \circ \varphi(a) + h\varphi'(a) f'(\varphi(a)) + o(h) f'(\varphi(a)) + o(k)$

Or $o(h) f'(\varphi(a)) + o(k) = o(h)$

Prop : Soit L une application linéaire de E dans F , f une fonction dérivable sur I à valeurs dans E . Alors $L \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (L \circ f)'(x) = L \circ f'(x)$.

Dem : f est dérivable en x donc $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$

Or L est linéaire donc $L \circ f(x+h) = L \circ f(x) + hL \circ f'(x) + L(o(h))$

$L(o(h)) = \|h\| L(\varepsilon(h))$ or $L(\varepsilon(h)) \rightarrow 0$ car L est continue en 0

Prop : Soit B une application bilinéaire de $E \times E$ dans F , f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans E , on définit $B(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$

Alors $B(f, g)$ est dérivable sur I et $B(f, g)'(x) = B(f', g)(x) + B(f, g')(x)$

Dem : f est dérivable en x donc $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$

g est dérivable en x donc $g(x+h) = g(x) + hg'(x) + o(h)$

$$B(f(x+h), g(x+h)) = B(f(x), g(x)) + h[B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))] + \|h\| [B(\varepsilon_1(h), g(x) + hg'(x)) + B(f(x) + hf'(x), \varepsilon_2(h))] + \|h\|^2 B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))$$

Exemple : Dérivation d'un produit scalaire $\langle f(x), g(x) \rangle' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$

En PC : Si f est C^2 et que $\|f'(t)\| = k \Rightarrow f'(t) \perp f''(t)$

II) Intégration sur un intervalle compact :

Exo : Calculer $\int_0^1 \frac{x}{5+4x+x^2} dx$

Exo : Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n}^{5n} \frac{1}{p}$

1°) Vecteur intégral et sommes de Riemann (1826-1866) :

Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans E

On note $(e_i)_{i=1..n}$ une base de E , $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i$

On définit alors $\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$

Exemple : si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$

Application : $\int e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i}$

Exo : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

Prop : Si f est continue par morceaux sur I à valeurs dans un espace vectoriel normé E , on a

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \quad (\text{avec } a \leq b) \quad \text{avec } \|x\| = \max_{i \in [1, n]} |x_i|$$

Dem : $\forall i \in [1, n]$, $\left| \int_a^b f_i(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_i(t)| dt$ or $\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$

Donc $\exists j \in [1, n]$ tel que $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \left| \int_a^b f_j(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_j(t)| dt \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$

Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans E , on appelle somme de Riemann de f associée à la subdivision régulière $(a_i)_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}$ en n parties de $[a, b]$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} : a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n}, R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Th : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors la suite définie par R_n est convergente, sa

limite sera l'intégrale de f sur $[a, b]$ $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$

Dem : On pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$

$$A = \left\| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\|$$

$$A = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) dt \right\| \left(\text{car } x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \right)$$

$$A = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) dt \right\| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|f(t) - f(x_k)\| dt$$

f est continue sur $[a, b]$ donc f est uniformément continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y), |x - y| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

On choisit N tel que si $n > N$ alors $\frac{b-a}{n} < \eta$

Or $|t - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}| = \frac{b-a}{n}$ alors $\|f(t) - f(x_k)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\text{Ainsi } \left\| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\| < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

Rem : On obtient le même résultat avec la somme $R'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$

$$\text{Exo : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} = \ln p$$

2°) Quelques propriétés :

Prop : L'intégrale est un opérateur linéaire $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$

Prop : L'intégration de fonctions réelles est un opérateur positif et croissant, avec $a \leq b$ donc

si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$, et si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

Prop : Soit L une application linéaire et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ alors

$L(f)$ admet une intégrale sur $[a, b]$ et $\int_a^b L(f)(t) dt$ ne dépend que des $\left(\int_a^b f_i(t) dt \right)$

Dem : L est linéaire en dimension finie donc continue, ainsi $t \mapsto L(f)(t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$

On note $(e_i)_{i=1..n}$ une base de E , $\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i \Rightarrow L(f)(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) L(e_i)$

On définit alors $\int_a^b L(f)(t) dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) L(e_i)$

3°) Intégrale fonction de sa borne supérieure :

Th fondamentale de l'analyse : Si f une fonction continue de I sur E (un espace vectoriel de dimension finie), a un point de I , alors f admet des primitives et la fonction F définie par :

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une fonction de classe C^1 sur I et elle vérifie $F'(x) = f(x)$. F est l'unique primitive de f qui s'annule en a

$$\text{Dem : On pose } g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{k}{n}h\right)$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{k}{n}h\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{k}{n}h\right) \right)$$

(cette permutation de limite se justifiera par l'étude de la CVU)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lim_{h \rightarrow 0} f\left(x + \frac{k}{n}h\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x) \right) = f(x)$$

ce qui prouve que g est dérivable et admet f comme dérivée, comme f est continue, g est bien classe C^1 . On a de plus $g(a) = 0$ et si F est une autre primitive qui s'annule en a on aura

$$F(x) = g(x) + K \text{ et si } x = a \Rightarrow K = 0$$

Exo : On suppose f continue sur I , étudier la dérivabilité de $x \mapsto \int_a^x \cos(x+t) f(t) dt$, $a \in I$

Prop : Si G est une primitive de f sur I alors $\forall (u, v) \in I^2, G(u) - G(v) = \int_v^u f(t) dt$

Prop : Si f est de classe C^1 de I sur E alors $\forall (a, x) \in I^2, f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$

Prop : Soient α et β deux fonctions C^1 sur I à valeurs dans J et f continue sur J alors la fonction

$$x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{ et } \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Exo : Calculer $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt$

4°) Rappel des techniques de calcul d'intégrale :

L'intégration par parties sur I : si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur I alors on a

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Exo : Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

Le changement de variable : si φ un C^1 -difféomorphisme sur $[a, b]$, si f est une fonction continue par

morceaux telle que $\varphi([a, b]) \subset I$ alors on a $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

Exo : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

5°) Les formules de Taylor (1685-1731)

Th : (avec reste intégral ou reste de Laplace)

Soit f une fonction de classe C^n de I sur E , de classe C^{n+1} par morceaux sur I alors

$$\forall (a, b) \in I^2, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Dem : Par récurrence sur n . Pour $n = 0$: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

On suppose l'égalité vraie $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$

Or f est de classe C^{n+2} , on peut donc effectuer une IPP sur l'intégrale

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx = \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x) dx, \text{ d'où le résultat}$$

Rem : On l'écrit également

$$\forall (x, a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = T_n(x) + R_n(x)$$

Conséquence : On obtient l'inégalité suivante

$$\forall (a, b) \in I^2, \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

Th (HP) : Formule de Taylor-Lagrange (1736-1813)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} de I sur E , alors il existe c élément de I tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Th : Formule de Taylor-Young (1863-1942)

Soit f une fonction de classe C^n de I sur E , alors f admet en tout point a de I un développement limité à

l'ordre n donné par $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$

III) Intégration sur un intervalle quelconque :

1°) Convergence d'intégrale généralisée :

Def : Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que

l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est convergente lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite quand $x \rightarrow b$, cette limite

sera alors notée $\int_a^b f(t) dt$

Exemple : Le cas des fonctions $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$

Prop : Soient f et g deux fonctions telles que les intégrales $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent alors

$$\lambda \in \mathbb{C}, \int_I (\lambda f + g)(t) dt \text{ est convergente et } \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Dem : Immédiat en utilisant les résultats sur les limites

Prop : Soit f une fonction positive telle que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

Prop : Soient f et g deux fonctions telles que les intégrales $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent alors

$$\forall x \in [a, b[, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$$

Dem : $\forall t \in [a, x] \subset I, g(t) - f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^x g(t) - f(t) dt \geq 0$. Or $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent

$$\text{donc } \int_a^b g(t) - f(t) dt \geq \int_a^x g(t) - f(t) dt \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt$$

Prop : Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ converge, alors la fonction

$$x \mapsto \int_x^b f(t) dt \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, b[\text{ et sa dérivée est } x \mapsto -f(x)$$

Dem : On utilise la relation $\int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$ puis le théorème fondamental de l'analyse

2°) Fonctions intégrables sur I :

On note $I = [a, b[$, si toute fois $I =]a, b[$ on effectuera deux études sur $]a, c[$ et $[c, b[$

Def : Soit f une fonction continue par morceaux sur I , f est dite intégrable sur I lorsque $\int_I |f(x)| dx$ est convergente (on dira aussi que $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente)

Exemple : $f(x) = \ln x$, f est intégrable sur $]0, 1]$

Prop : Si f est intégrable sur $[a, b[$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente

Dem : Dans le cas réel

Notons $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$ alors $f = f^+ - f^-$

on a $\forall x \in I, 0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ et $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$

Or f est intégrable donc $\int_a^x f^+(t) dt \leq \int_a^x |f(t)| dt$ ainsi la fonction $x \mapsto \int_a^x f^+(t) dt$ est croissante et majorée, elle admet donc une limite en b

Il en est de même pour $x \mapsto \int_a^x f^-(t) dt$ et donc par linéarité pour $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

Dans le cas complexe on aura $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$ or $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$

donc $\int_a^b \operatorname{Re}(f)(x) dx$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)(x) dx$ convergent

La réciproque est fautive, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente or $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$

$$\text{Dem : } \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_{\pi}^x - \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos x}{x} - \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\text{or } \left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ et } \left| \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_{\pi}^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\pi} \text{ donc } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ est convergente}$$

Par contre si on considère $J_n = [n\pi, (n+1)\pi]$, $n \geq 1$, $\forall t \in J_n$, $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \geq \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}$ donc

$$\int_{J_n} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{J_n} |\sin t| dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

$$\text{Et } \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \rightarrow +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas intégrable sur } [\pi, +\infty[$$

Th : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$

Prop : Une fonction positive continue et intégrable sur I est nulle si et seulement si son intégrale sur I est nulle

Dem : On note $I = [a, b[$, si $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow \forall x \in I, 0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$ car f est positive.

De plus, $\forall x \in I, \int_a^x f(t) dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, x], f(t) = 0$ or f est continue sur I donc nulle sur I

Prop : L'ensemble $\ell^1(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I forme un espace vectoriel normé par $\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$

Prop : Si $f \in \ell^1(I)$ alors on a $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$

Dem : On a pour tout x , $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$ puis on passe à la limite quand x tend vers b

Prop : f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b < +\infty$, si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) < +\infty$, alors f est prolongeable par continuité en b et donc intégrable sur $[a, b[$

3°) Les critères d'intégrabilité pour les fonctions positives :

Th : Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$, f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$

Dem : Une fonction croissante admet une limite en b si et seulement si elle est majorée

Th : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$

Si g est intégrable sur I alors f est aussi intégrable sur I

Si f n'est pas intégrable sur I alors g n'est pas intégrable sur I

Dem : On a $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$ et $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$.

donc $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ l'est aussi elle admet donc une limite en b

La seconde partie est la contraposée de la première

Exemple : $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$

Conséquence :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $I = [a, b[$

Si au voisinage de b on a $f(x) = o(g(x))$ ou $O(g(x))$ alors si g est intégrable sur I , f sera aussi intégrable sur I

Exemple : $f(x) = x^n e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Th : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a, b[$

Si f et g sont équivalentes au voisinage de b alors f et g sont soit toutes les deux intégrables sur I soit elles ne le sont ni l'une ni l'autre

Dem : On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors si $|x-b| < \eta \Rightarrow \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$

Puis on utilise la critère de comparaison sur les fonctions positives

Prop : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ qui admet une limite à l'infini il est nécessaire que cette limite soit nulle pour que f soit intégrable sur $[a, +\infty[$

Dem : Si la limite de f n'est pas nulle alors $|f(t)| \sim L$ or $\int_a^{+\infty} L dt$ est divergente

Prop : Si la limite de f en $+\infty$ est infinie, alors f ne sera pas intégrable sur $[a, +\infty[$

Dem : Pour x suffisamment grand on aura $|f(x)| \geq 1$, or $x \mapsto 1$ n'est pas intégrable

4°) Intégrales étalons :

Th : $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow \alpha < 1$

Dem : On suppose $\alpha \neq 1$

$\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right]$ admet une limite en $b \Leftrightarrow \alpha < 1$

Et si $\alpha = 1$, $\int_a^x \frac{dt}{b-t} = \ln(b-a) - \ln(b-x) \rightarrow +\infty$

En particulier $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a] \Leftrightarrow \alpha < 1$

Exemple : Etude de l'intégrabilité de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ sur $]0, 4[$

Th : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$

Dem : on suppose $\alpha \neq 1$

$\int_1^x \frac{dt}{(t)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{(x)^{\alpha-1}} - 1 \right]$ admet une limite en $+\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

Et si $\alpha = 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \rightarrow +\infty$

Exo : Etudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$, puis sur $]0, 1]$

Etudier l'intégrabilité de $x \mapsto 1 - \text{th}(x)$ sur $[0, +\infty[$

Etudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\text{th}(3x) - \text{th}(2x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$

5°) Techniques de calcul :

Th : Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $I = [a, b[$ telles que $\lim_{x \rightarrow b} uv$ soit finie. Si $x \mapsto u(x)v'(x)$ est intégrable sur $I = [a, b[$. Alors $x \mapsto u'(x)v(x)$ est intégrable sur $I = [a, b[$ et on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

Attention : Il est parfois dangereux de faire une IPP sur un intervalle non compact, même si la fonction est intégrable, voir l'exemple très classique de $f(x) = \sin x \ln x$ sur $]0, 1]$

Th : f est intégrable sur $[a, b[$, φ une bijection de classe C^1 sur $[a, b[$, alors on peut utiliser le

changement de variables $t = \varphi(u)$ on obtient : $\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\lim_b \varphi} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$

Exemple : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$

6°) Des exemples très classiques :

Exo1 : Par primitive directe $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \pi$

Exo2 : Calculer les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx$

7°) Un calcul classique : l'intégrale de Dirichlet :

On a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Pour tout réel t et tout entier naturel n non nul, on pose : $C_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$

Calculer $C_n(t)$, pour tout $t \in [0, \pi]$

En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} dt$

Justifier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t} \text{ si } t \in]0, \pi] \end{cases}$$

Montrer que la dérivée de f est bornée sur $[0, \pi]$.

$$\text{Montrer que } \int_0^\pi f(t) \sin((n+1/2)t) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n+1/2)t) dt$$

Que peut-on en déduire quand n tend vers l'infini ?

$$\text{Montrer que } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} dt. \text{ En déduire la valeur de } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

8°) Intégration des relations de comparaison :

Th : Si f est une fonction continue sur $[a, b[$ et g une fonction positive telles que $f(x) = o(g(x))$ avec g

$$\text{intégrable sur } [a, b[\text{ alors } \int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

$$\text{Dem : } \forall \varepsilon > 0, \exists c \text{ tel que si } x \in [c, b[, |f(x)| \leq \varepsilon g(x)$$

$$\text{d'où } \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt$$

Th : Si f est une fonction continue sur $[a, b[$ et g une fonction positive telle que $f(x) = o(g(x))$ avec g

$$\text{non intégrable sur } [a, b[\text{ alors } \int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

$$\text{Dem : } \forall \varepsilon > 0, \exists c \text{ tel que si } x \in [c, b[, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(x)$$

$$\text{D'où } \left| \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_c^x g(t) dt$$

$$\text{Or } \left| \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_a^c |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_c^x g(t) dt \leq \int_a^c |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t) dt$$

$$\text{Ainsi } \frac{\left| \int_a^x f(t) dt \right|}{\int_a^x g(t) dt} \leq \frac{\int_a^c |f(t)| dt}{\int_a^x g(t) dt} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } \int_a^x g(t) dt \rightarrow +\infty \text{ donc } \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_a^x g(t) dt$$

Th : Si f est une fonction positive sur $[a, b[$ telle que $f(x) \sim_b g(x)$ avec g intégrable sur $[a, b[$ alors

$$\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$$

Th : Si f est une fonction positive sur $[a, b[$ telle que $f(x) \sim_b g(x)$ avec g non intégrable sur $[a, b[$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$$

$$\text{Exemple : Donner un équivalent à l'infini de } \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \text{ et } \int_x^\infty \frac{\arctan t}{t^2} dt$$

Exo : Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, déterminer un équivalent à l'infini, en déduire que F est intégrable sur

$$[0, +\infty[\text{ et calculer } \int_0^{+\infty} F(x) dx$$

IV) Les équations et systèmes différentiels linéaires :

1°) Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x est une fonction de classe C^1 sur I alors l'équation :

$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$ où a , b et c sont continues sur I , est une équation différentielle linéaire du 1° ordre

→ Méthode de résolution :

- Il faut que la fonction a ne s'annule pas sur I
- On résout l'équation homogène (dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1)
- On cherche une solution particulière de (E) (par diverses méthodes en fonction du second membre ou par la méthode de variation de la constante)

Exo : Résoudre les équations suivantes

$$2y'(x) + 3y(x) = xe^x$$

$$5y'(x) - 4y(x) = 2\cos x - \sin x$$

$$xy'(x) + y(x) = \sin x$$

2°) Systèmes différentiels linéaires du 1° ordre :

Soit E un espace vectoriel de dimension n , I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$, b une application continue de I dans E

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1, la recherche d'une fonction x de classe C^1 de I dans E vérifiant $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$

On peut écrire cela sous la forme matricielle suivante $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ où A est la matrice de a donc $A \in M_n(C^0(I))$, $B \in M_{n,1}(C^0(I))$ et $X \in M_{n,1}(C^1(I))$

On parle alors de système différentiel linéaire d'ordre 1 en dimension n

Si la fonction b est nulle, on dit que le système est homogène

$$\text{Ex : } \begin{cases} x_1'(t) = tx_1(t) + (1-t^2)x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - tx_2(t) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) \\ y_2'(x) = 2y_2(x) + y_1(x) \\ y_3'(x) = 3y_3(x) + y_2(x) + y_1(x) \end{cases}$$

3°) Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire :

Th : On appelle problème de Cauchy la recherche de X de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

On peut affirmer que ce problème a une solution unique dès que A et B sont continues

$$\text{Exo : } \begin{cases} y_1'(x) = (4-2x)y_1(x) + (x-2)y_2(x) \\ y_2'(x) = \cos(2x)y_1(x) + \sin^2(x)y_2(x) - 1 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^{-t} \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) - e^{-t} \\ x(0) = 1, y(0) = 2 \end{cases}$$

4°) Système différentiel linéaire homogène :

$(S_h): X'(t) = A(t)X(t)$ où A est une matrice carrée d'ordre n

Th : L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n , toute base sera appelée un système fondamental de solutions

Dem : S n'est pas vide car la fonction nulle est solution, $S \subset C^1(I, \mathbb{R})$

Soit $(X, Y) \in S^2$, alors $\lambda X + Y \in S$, S est bien un sous espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R})$

Soit $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $t_0 \in I, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le problème de Cauchy

suivant $\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = e_i \end{cases}$, ce système admet une solution unique X_i

On construit ainsi une famille $(X_i)_{i=1..n}$ de solution de S .

Soit $(\lambda_i)_{i=1..n}$ telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0$, en particulier pour $t = t_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, or la famille $(e_i)_{i=1..n}$ est libre donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$, ce qui prouve l'indépendance linéaire de la famille $(X_i)_{i=1..n}$.

Soit $X \in S$, on note $\alpha = X(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. On considère alors $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. X et Y sont solutions

du même problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = \alpha \end{cases}$, donc $X=Y$. Ce qui prouve que la famille

$(X_i)_{i=1..n}$ est une base de S

Intérêt : Si on connaît n solutions du système homogène, il suffit qu'elles soient linéairement indépendantes et on aura toutes les solutions comme combinaison linéaire de ces n solutions

Rem : On considère le déterminant dans $(C^0(I, \mathbb{R}))^n$ des n solutions $(X_i)_{i=1}^n$

S'il est non nul le système est un système fondamental de solutions

Exemple : $\begin{cases} y_1'(t) = ty_1(t) + (1-t^2)y_2(t) \\ y_2'(t) = -ty_2(t) + y_1(t) \end{cases}$ alors $X_1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ et $X_2 = \begin{bmatrix} t^2+1 \\ t \end{bmatrix}$ sont solutions

or $\det(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} t & t^2+1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Les solutions seront $X = AX_1 + BX_2$ soit $\begin{cases} y_1(t) = At + B(t^2+1) \\ y_2(t) = A + Bt \end{cases}$

5°) Solutions du S.D.L. :

Th : Soient $(S): X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ et $(S_h): X'(t) = A(t)X(t)$, on suppose connaître X_0 solution de (S) alors X est solution de $(S) \Leftrightarrow X - X_0$ est solution de (S_h)

On ajoute à la solution générale du système homogène, une solution particulière du système avec second membre pour obtenir l'ensemble des solutions de (S) , cet ensemble est une variété linéaire affine de dimension n

Méthode de variation des constantes :

Exemple :
$$\begin{cases} y_1'(t) = ty_1(t) + (1-t^2)y_2(t) + (1-t^2)^2 \\ y_2'(t) = -ty_2(t) + y_1(t) + t(1+t^2) \end{cases}$$

Si les solutions du système homogène sont $X = AX_1 + BX_2$ soit
$$\begin{cases} y_1(t) = At + B(t^2 + 1) \\ y_2(t) = A + Bt \end{cases}$$

On pose $X = A(t)X_1 + B(t)X_2$ soit
$$\begin{cases} y_1(t) = A(t)t + B(t)(t^2 + 1) \\ y_2(t) = A(t) + B(t)t \end{cases}$$
 en remplaçant dans le système et on

obtient les dérivées de A et B , ce système est bien de Cramer car son déterminant vaut le déterminant du système fondamental de solutions de (S_h)

6°) Equation différentielle linéaire du 2° ordre :

$(E): a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$ où a ne s'annule pas sur I

E.D.L.2 incomplète : On suppose que $c(x) = 0$, on pose $z(x) = y'(x)$

Exo : Résoudre $y''(x) - y'(x) = \cos x$

E.D.L.2 à coefficients constants :

On pose l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$

Si $\Delta > 0$ alors $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$

Si $\Delta = 0$ alors $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$

Si $\Delta < 0$, $r = \alpha \pm i\beta$ alors $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

Lien avec la Physique, les solutions de $x''(t) - w^2x(t) = 0$ sont $t \mapsto Ae^{wt} + Be^{-wt} = \lambda \cosh(wt) + \mu \sinh(wt)$

les solutions de $x''(t) + w^2x(t) = 0$ sont $t \mapsto A \cos(wt) + B \sin(wt) = \lambda \cos(wt - \varphi)$

Exo : Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = xe^x$

Le cas général :

$(E): y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)$, on suppose les fonctions a , b et c continues sur I

On peut écrire cette équation comme un système :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(x) \\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) \end{bmatrix}$$

Si $X = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ c(x) \end{bmatrix}$ alors $X' = AX + B$

On peut donc appliquer la théorie des SDL du 1^o ordre

Le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique en imposant : $\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$

L'équation homogène correspond au système homogène, les solutions de l'équation homogène forment donc un espace vectoriel de dimension 2

Th et def : (y_1, y_2) forme un système fondamental de solutions si en au moins un point de I

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$. $W(y_1, y_2)$ s'appelle le Wronskien de (y_1, y_2)

Si (y_1, y_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène alors les solutions de (E) sont $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x) + y_0(x)$ où y_0 est une solution particulière

Méthode de la variation des constantes :

On cherche une solution de la forme : $\begin{cases} y_0(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x) \\ y_0'(x) = \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) \end{cases}$

Cela revient à imposer la condition : $\lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0$

En remplaçant dans l'équation, on obtient un système de Cramer en A' et B' :

$\begin{cases} \lambda'(x)y_1'(x) + \mu'(x)y_2'(x) = c(x) \\ \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$ dont le déterminant est le Wronskien

Exo : Résoudre : $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = x$ sur $]0, +\infty[$

Th : Si y_1 est une solution de l'équation homogène alors on pose $y(x) = z(x)y_1(x)$ et on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre incomplète (elle est du 1^o ordre en $x \mapsto z'(x)$)

Exo : Résoudre $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

7) Un exemple d'équation fonctionnelle

Déterminer les applications $f: \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$, telles que $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

Annexe : Les démonstrations vues en MPSI

Th de Rolle (1652-1719) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dem : si f est constante alors la dérivée est nulle pour tout x .

Sinon, f est continue sur un segment elle est donc bornée et atteint ses bornes, ainsi f admet un extremum, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Th des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Dem : Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

On a $g(a) = g(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Th : la formule de Leibniz (Gottfried 1646-1716)

Si f et g sont de classe C^p sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors le produit fg l'est aussi et

$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$$

Dem : Par récurrence sur p : pour $p=0$ on a $fg = fg$

$$\text{si } p = 1 : \sum_{k=0}^1 \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)} = f'g + fg' = (fg)'$$

On suppose que l'égalité $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$ est vérifiée

$$(fg)^{(p+1)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k+1)} g^{(p-k)} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)}$$

$$(fg)^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} f^{(k)} g^{(p+1-k)} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)}$$

$$(fg)^{(p+1)} = \sum_{k=1}^p \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) f^{(k)} g^{(p+1-k)} + f^{(p+1)} g + fg^{(p+1)}$$

$$\text{Or } \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k} \quad (\text{triangle de Pascal})$$

$$\text{Donc } (fg)^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)}$$

Th : Inégalité de Jensen : Si f est une fonction convexe sur I , soient $(x_i)_{i=1..n} \in \mathbb{R}^n$

$$\forall (\lambda_i)_{i=1..n} \text{ tels que } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Dem : On suppose que l'inégalité est vérifiée avec $n-1$ réels, l'initialisation avec $n=2$ est donnée par la définition de la convexité

$$\text{On utilise l'astuce } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i = (\lambda_1 + \lambda_2) y + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i$$

$$\text{Si } y = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq (\lambda_1 + \lambda_2) f(y) + \sum_{i=3}^n \lambda_i f(x_i) \text{ car } \lambda_1 + \lambda_2 + \sum_{i=3}^n \lambda_i = 1$$

$$\text{Il reste à majorer } f(y) = f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_2)$$

$$\text{Car } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ alors } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_2) \right) + \sum_{i=3}^n \lambda_i f(x_i)$$

Th : Si f est C^1 sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I

Dem : ($\Rightarrow$) On pose deux réels tels que $x < y$

f est convexe donc pour $t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

On a $z = tx + (1-t)y$ avec $t = \frac{z-y}{x-y}$, $z \in [x, y]$

$$\text{Donc } f(z) \leq \left(\frac{z-y}{x-y}\right) f(x) + \left(1 - \frac{z-y}{x-y}\right) f(y) \quad (*)$$

$$f(z) - f(x) \leq \left(\frac{z-y}{x-y} - 1\right) f(x) + \left(1 - \frac{z-y}{x-y}\right) f(y) = \left(\frac{z-x}{x-y}\right) (f(y) - f(x))$$

$$\text{Soit } \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\text{Si } t \rightarrow 1 \text{ soit } z \rightarrow x \text{ on obtient } f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\text{D'après } (*), f(z) - f(y) \leq \left(\frac{z-y}{x-y}\right) f(x) - \left(\frac{z-y}{x-y}\right) f(y) = \left(\frac{z-y}{x-y}\right) (f(x) - f(y))$$

$$\text{Or } z - y < 0 \Rightarrow \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$\text{Si } t \rightarrow 0 \text{ soit } z \rightarrow y \text{ on obtient } f'(y) \geq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Finalement si $x < y$ alors $f'(x) \leq f'(y)$

($\Leftarrow$) Soient trois réels tels que $x < y < z$, d'après le théorème des accroissements finis il existe

$$c_1 \in]x, y[\text{ tel que } f'(c_1) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, c_2 \in]y, z[\text{ tel que } f'(c_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\text{Comme } f' \text{ est croissante } f'(c_1) \leq f'(c_2) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \quad (*)$$

On pose alors $y = tx + (1-t)z$ et (*) devient

$$\frac{f(tx + (1-t)z) - f(x)}{tx + (1-t)z - x} \leq \frac{f(z) - f(tx + (1-t)z)}{z - tx - (1-t)z} \Leftrightarrow \frac{f(tx + (1-t)z) - f(x)}{(1-t)(z-x)} \leq \frac{f(z) - f(tx + (1-t)z)}{t(z-x)}$$

$$\text{Soit } f(tx + (1-t)z)(t + (1-t)) \leq tf(x) + (1-t)f(z)$$