Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap A2 : Exercices vus en classe ou à faire

Rappel de MPSI

Exo1 :

La fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *?*

Son prolongement est-il de classe C^1 *?*

Exo2 :

Soit $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}-\dfrac{1}{x}$, *déterminer la limite en* 0

Exo3 :

Soit f : $[0,1]\to[0,1]$ *continue sur* $[0,1]$, *montrer qu'il existe c appartenant à* $[0,1]$ *tel que* $f(c)=c$

Exo4 :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ *telle que* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}$, *montrer qu'il existe c appartenant à* $[0,1]$ *tel que* $f(c)=c$

Exo5 :

Soit f définie par $f(x)=e^{x\sqrt{3}}\sin(x)$, *déterminer a et* θ *tels que* $f^{(n)}(x)=a^n e^{x\sqrt{3}}\sin(x+n\theta)$

Exo6 :

Soit $(x_i)_{i=1..n}$ *une famille de réels strictement positifs*

Montrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$ *(on utilisera la concavité de la fonction ln)*

Exo7 :

Pour tout entier n non nul on note le polynôme P_n *tel que* $P_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-i)$

Montrer que pour tout n, P'_n *admet exactement n racines*

Exo8 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* f_n *définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f_n(x)=x^{n-1}\ln(x)$.*Montrer que* $f_n^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{x}$

Exo9 :

On définit pour tout réel x, $H_0(x)=1$ *et pour tout entier* $n\neq 0$, $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$. *Montrer que* H_n *est un polynôme de degré n admettant exactement* $n+1$ *racines (on pourra calculer la dérivée de* H_n *)*

Exo10 :

Soit $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ *pour* $x>1$

Etablir que $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{\left(x^2-1\right)^{n-\frac{1}{2}}}$ *où* $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n *est une fonction polynomiale*

Exprimer $\left(x^2-1\right)f'(x)$ *en fonction de x et* $f(x)$

Etablir à l'aide de la formule de Leibniz que $P_{n+1}(x)+A_n(x)P_n(x)+B_n(x)P_{n-1}(x)=0$ *où* A_n *et* B_n *sont des polynômes à préciser*

Démontrer que $P'_n(x)=-n(n-2)P_{n-1}(x)$ *pour* $n\geq 1$

<u>Exo11 :</u>

Soit une fonction de classe C^2 *sur* $[a,b]$ *telle que* $f(a)=f(b)=0$

Montrer que $\forall c\in\,]a,b[\,,\ \exists d\in\,]a,b[$ *tel que* $f(c)=\dfrac{(c-a)(c-b)}{2}f''(d)$

<u>Exo12 :</u>

Soit une fonction de classe C^2 *sur* $[a,b]$ *telle que* $f(a)=f'(a)$ *et* $f(b)=f'(b)$

Montrer que $\exists c\in\,]a,b[$ *tel que* $f(c)=f''(c)$

<u>Exo13 :</u>

Soient 2 fonctions f et g de classe C^1 *sur* $[a,b]$ *telles que* $\forall x\in[a,b]$, $g'(x)\neq 0$

Montrer que $\exists c\in\,]a,b[$ *tel que* $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

<u>Exo14 :</u>

Soit $t\in\mathbb{R}$. *Montrer que* $\forall x\in[-1,1]$, $e^{tx}\leq\dfrac{1+x}{2}e^{t}+\dfrac{1-x}{2}e^{-t}$

<u>Exo15 :</u>

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

Montrer que pour tous réels positifs a et b $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$

<u>Exo16 :</u>

Déterminer un développement limité à l'ordre 7 *en* 0 *de* $\tan(x)$

En déduire un développement limité à l'ordre 7 *en* 0 *de* $\tan(\sin(x))-\sin(\tan(x))$

<u>Exo17 :</u>

Effectuer un développement limité à l'ordre 2 *en* 0 *de* $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

<u>Exo18 :</u>

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de* $\ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(x)\right)\right)$

<u>Exo19 :</u>

Soit f définie sur $]-1,+\infty[$ *par* $f(x)=x+\ln(1+x)$

Déterminer le DL en 0 *à l'ordre* 3 *de sa réciproque*

<u>Exo20 :</u>

Déterminer l'ensemble de définition et de dérivation de la fonction f définie par $f(x)=\arccos(4x^3-3x)$

On calculera ensuite $f'(x)$ *et on retrouvera une expression de* $f(x)$ *en fonction de* $\arccos x$

<u>Exo21 :</u>

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

<u>Exo22 :</u>

Montrer que pour $x\geq 0$, $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$

I) Dérivabilité

Exo23 :

Montrer que la fonction f est dérivable en 1 *avec* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$

Exo24 :

Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dérivables en* 0 *telles que :* $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=2f(x)$

Exo25 :

Soit f : $[0,1]\to E$ *dérivable en* 0 *telle que* $f(0)=0$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *où* $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

Exo26 :

Soit f définie par $f(x)=e^{x\sqrt{3}}\cos(x)$ *, déterminer* $f^{(n)}(x)$

Exo27 :

Pour deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}^+$ *, on définit le produit de convolution*

$$f*g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

*Montrer que * est commutatif et que* $x\mapsto f*g(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$

Exo28 :

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ *telles que :* $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+t)=f(x)f(t)$

III) Intégration

Exo29 :

Soit g une fonction de classe C^1 *sur* $[a,b]$*. Montrer que* $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(At)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$

Exo30 :

Soit $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{(2k)^3+n^3}$ *, déterminer la limite de cette suite*

Exo31 :

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2n}^{4n}\dfrac{1}{k}$*. Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{3n}\dfrac{1}{k}$

Exo32 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{2k+1}$

Exo33 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exo34:

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$

Exo35 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k}{n}\right)\sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ *(On utilisera* $\left|\sin x-x\right|\le\dfrac{x^2}{2}$ *)*

Exo36 :
Pour deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}^+$ *, on définit le produit de convolution*
$$f*g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$
*Montrer que * est commutatif et que* $x\mapsto f*g(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$
Exo37 :
Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\mathrm{d}x$
Exo38 :
Calculer $\int_{1/2}^{3/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$
Exo39 :
Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$
Exo40 :
Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$
Exo41 :
Calculer $I=\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t\ln t}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t$ *où* $x>0$
Exo42 :
Calculer $I=\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$
Exo43 :
Calculer $I=\int_0^1 \frac{x-1}{x^3-1}\mathrm{d}x$ *et* $J=\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$
Exo44 :
Calculer $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$
Exo45 :
Déterminer $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
Exo46 :
Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2}$ *, on pourra utiliser* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
Exo47 :
Montrer que $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\sin t}\mathrm{d}t \underset{0^+}{\sim} -\ln x$
Exo48 :
Calculer I_n *en fonction de n où* $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$
(on donnera le résultat sous forme de factoriel)

Exo49 :

Calculer $I=\int_0^{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

Exo50 :

Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$

Exo51 :

Montrer que $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$

Exo52 :

Soient g une fonction continue et positive sur $[a,b]$ *et f une fonction continue sur* $[a,b]$

Montrer qu'il existe c appartenant à $[a,b]$ *tel que* $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t=f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Exo53 :

Soit la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{1+x^2+x^4}$. *Calculer* $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

Exo54 :

Calculer $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Exo55 :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Exo56 :

Calculer $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{5+4x+x^2}$

Exo57 :

Calculer $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}$

Exo58 :

Calculer $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$

Exo59 :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$

Exo60 :

Montrer que $\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}x$

Exo61 :

Soit $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ *pour* $x>1$

Montrer que H est de classe C^1 *sur* $]1,+\infty[$ *et préciser sa dérivée*

On pose $u(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}$, *déterminer* $\lim\limits_{x\to 1} u(x)$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to 1^+} H(x)$

III) Intégration sur un intervalle :

Exo62 :

Soit $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, *f est-elle intégrable sur* $[1,+\infty[$ *?*

Exo63 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$, *montrer qu'elle est intégrable sur l'intervalle* $[0,+\infty[$.

Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Exo64 :

Etudier l'intégrabilité de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo65 :

Etudier l'intégrabilité de $f(x)=\dfrac{1}{x^2\ln x}$ *sur* $[2,+\infty[$

Exo66 :

Calculer après avoir justifié l'existence $I=\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$

Que peut-on dire pour $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ *où a et b sont 2 réels tels que* $a<b$ *?*

Exo67 :

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$. *Déterminer en fonction de m la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin mt}{t}\mathrm{d}t$ *et de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin mt\cos t}{t}\mathrm{d}t$

Exo68 :

Soit $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. *Etudier l'intégrabilité sur* $]0,1]$ *et sur* $[1,+\infty[$

Exo69 :

Soit $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^\alpha}$. *Déterminer les valeurs de* α *pour f soit intégrable sur* $]0,+\infty[$

Exo70 :

Etudier l'intégrabilité de $f(t)=\dfrac{\sin t}{t^2}$ *et de* $g(t)=\dfrac{(\sin t)^2}{t^2}$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo71 :

Déterminer la valeur de $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t$

Exo72 :

Pour tout un entier naturel n non nul, on note $I(n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^n}$

Exprimer $I(n+1)$ *en fonction de* $I(n)$, *puis montrer que* $I(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$

Exo73 :

Déterminer les fonctions continues $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *telles que* $\int_0^1 \left(f\left(x^2\right)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{3}$

Exo74 :

Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)\mathrm{d}x$

Exo75 :

Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z)>0$ *et n un entier naturel*

On considère $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-zt}t^n\mathrm{d}t$ *, calculer* I_n *en fonction de z et de n*

Exo76 :

Justifier que les fonctions sont intégrables et calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x+2)^2}$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(e^x+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\left(x^8+1\right)}\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$
7. $\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(3x)}\mathrm{d}x$
9. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln(x)\mathrm{d}x$
10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$
12. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\mathrm{d}x$
13. $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$

14. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}(2x)}{x}\,dx$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

16. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)}\,dx$

17. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

18. $\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

19. $\int_0^{+\infty} \frac{2\arctan x-\arctan(4x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(1+\tan x)(2-\sin(2x))}\,dx$

21. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt$

22. $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, *et en déduire* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

<u>Exo77 :</u>

Soit $b\in\,]0,1[$ *et* $n\in\mathbb{N}$, *on pose* $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{b^2+1-2b\cos x}\,dx$

Justifier l'existence de I_n, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Calculer* I_0 *et* I_1

Calculer $I_{n+2}+I_n-\left(b+\frac{1}{b}\right)I_{n+1}$

En déduire la valeur de I_n *(On utilisera :* $\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-4=\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$ *)*

<u>Exo78 :</u>

Soit $F(x)=\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{t^2}\right)\ln(t)\,dt$, *montrer que f est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$

<u>Exo79 :</u>

Montrer que la fonction $t\mapsto t^k e^{-t^2}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *pour tout entier k positif*

Montrer alors que $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2}e^{-x^2}x^{k-1}$ *quand* $x\to+\infty$

<u>Exo80 :</u>

Etablir que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$

Puis en déduire pour $(a,b)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ *tel que* $a<b$ *la valeur de* $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b e^{-nt^2}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}$

<u>Exo81 :</u>

Pour $x \geq 0$ *, on pose* $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ *, justifier que F est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$

Puis calculer $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$

<u>*Exo82 :*</u>

Montrer que $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3} \right)$ *lorsque* $x \to +\infty$

<u>*Exo83 :*</u>

Donner un équivalent a l'infini de $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} \mathrm{d}t$ *et* $\int_x^{\infty} \frac{\arctan t}{t^2} \mathrm{d}t$

<u>*Exo84 :*</u>

Soit f une application de classe C^1 *sur* $[1,+\infty[$ *à valeurs strictement positives et telle que* $f(1)=1$*. On suppose que le quotient* $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ *admette une limite* α *en* $+\infty$

Montrer que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ *tend vers* α *en* $+\infty$

On suppose que $\alpha < -1$*, montrer que f est intégrable sur* $[1,+\infty[$

<u>*Exo85 :*</u>

Soit a >0 , on note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$*. Justifier l'existence de I et calculer I*

<u>*Exo86 :*</u>

Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} t\mathrm{E}\left(\frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$

<u>*Exo87 :*</u>

Soit $f(t) = \cos(t^2)$*. Justifier l'existence de* $\int_1^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$ *, puis que f n'est pas intégrable sur* $[1,+\infty[$

<u>*Exo89*</u>

Soit f de classe C^2 *sur* $[0,+\infty[$ *telles f et sa dérivée seconde f'' soit intégrables sur* $[0,+\infty[$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

<u>*IV) Equations et systèmes différentiels linéaires*</u>

<u>*Exo90 :*</u>

Résoudre $2y'(x) + 3y(x) = xe^x$

<u>*Exo91 :*</u>

Résoudre $4y'(x) - 3y(x) = (x+1)e^x$

<u>*Exo92 :*</u>

Résoudre $3y'(x) - y(x) = 3\cos x$

<u>*Exo93 :*</u>

Résoudre $5y'(x) - 4y(x) = 2\cos x - \sin x$

<u>*Exo94 :*</u>

Résoudre $xy'(x) - y(x) = x^2 \cos x$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo95 :

Résoudre $2y'(x)-3y(x)=\cos 2x$

Exo96 :

Résoudre $x^2y'(x)-y(x)=x^2-x$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo97 :

Résoudre $xy'(x)+2y(x)=\cos x$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo98 :

Résoudre $y'(x)\sin x-y(x)\cos x=\sin x-x\cos x$ *sur* $]-\pi,\pi[$

Exo99 :

Résoudre $y'(x)\cos^2 x-y(x)=e^{\tan x}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Exo100 :

Résoudre le problème $(x+1)y'(x)-xy(x)+1=0$, $y(2)=2$, $x\in\,]-1,+\infty[$

Exo101 :

Résoudre $2xy'(x)-3y(x)=\sqrt{x}$ *sur* $]0,+\infty[$

Existe t-il des solutions sur $[0,+\infty[$ *?*

Exo102 :

Résoudre $xy'(x)+y(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ *sur* $]-1,0[$ *puis sur* $]0,1[$

Existe t-il des solutions sur $]-1,1[$ *?*

Exo103 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x'(t)=x(t)-y(t)+e^{-t} \\ y'(t)=x(t)+3y(t)-e^{-t} \\ x(0)=1,\ y(0)=2 \end{cases}$

Exo104 :

Résoudre $\begin{cases} y_1'(x)=y_1(x) \\ y_2'(x)=2y_2(x)+y_1(x) \\ y_3'(x)=3y_3(x)+y_2(x)+y_1(x) \end{cases}$

Exo105 :

Résoudre $\begin{cases} y_1'(t)=ty_1(t)+(1-t^2)y_2(t)+(1-t^2)^2 \\ y_2'(t)=-ty_2(t)+y_1(t)+t(1+t^2) \end{cases}$

Exo106 :

Résoudre $\begin{cases} x'(t)=-x(t)+\dfrac{1}{t}y(t)+\ln(t)+\dfrac{1}{t} \\ y'(t)=(1-t)x+y(t)+(t-1)\ln(t) \end{cases}$, $t>0$

Exo107 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t)=(t-3)x_1(t)+2x_2(t) \\ x_2'(t)=2x_1(t)+(t-3)x_2(t) \end{cases}$

Exo108 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t)=(t+3)x_1(t)+2x_2(t) \\ x_2'(t)=-4x_1(t)+(t-3)x_2(t) \end{cases}$

Exo109 :

Résoudre : $\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos(t) + y(t)\sin(t) \\ y'(t) = -x(t)\sin(t) + y(t)\cos(t) \end{cases}$

Exo110 :

Résoudre $\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = -x(t) - 7y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) \end{cases}$

Exo111 :

Résoudre $y''(x) - y'(x) = \cos x$

Exo112 :

Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = xe^x$

Exo113 :

Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x(1-2x)$

Exo114 :

Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2e^x$

Exo115 :

Résoudre $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x$

Exo116 :

Résoudre $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$

Exo117 :

Résoudre $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin x$

Exo118 :

Résoudre $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = x$

Exo119 :

Résoudre $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2\mathrm{sh}(x)$

Exo120 :

Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Exo121 :

Résoudre $y''(x) - y'(x) + y(x) = 2e^{-3x}$

Exo122 :

Résoudre $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2\mathrm{ch}(x)$

Exo123 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\;y''(x) + y(x) = 2\mathrm{ch}(x)$

Exo124 :

Résoudre $(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = xe^{-x}$

Exo125 :

Résoudre $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = x$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo126 :

Résoudre $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x^3$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo127 :

Résoudre $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = x^4$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo128 :

Résoudre $y''(x)-y(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo129 :

Résoudre $y''(x)+y(x)=x\sin x$

Exo130 :

Résoudre $y''(x)+y(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$ *sur* $]0,\pi[$

Exo131 :

On considère l'équation : $(1-\cos 4x)y''(x)+2\sin 4xy'(x)-8y(x)=0$, $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Résoudre cette équation sachant qu'il existe deux solutions inverses l'une de l'autre

(On pourra donc effectuer le changement $z(x)=\dfrac{1}{y(x)}$ *)*

Exo132 :

Résoudre $x^2y''(x)-3xy'(x)+4y(x)=x^2$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo133 :

Résoudre $x^2y''(x)-x(x+2)y'(x)+(x+2)y(x)=-x(x+1)$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo134 :

Résoudre $x(1-x)f''(x)-xf'(x)+f(x)=0$ *sur* $]0,1[$

Exo135 :

Résoudre $(1+x^2)y''(x)-2y(x)=-2x$

Exo136 :

Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *l'équation différentielle* $(\mathrm{E}):t^3y''(t)-2ty(t)+3=0$.

Exo137 :

Résoudre : $t^2x''(t)-2x(t)=3t^2$ *sur* $]0,+\infty[$

Exo138 **:**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(\mathrm{E}):(1+x^2)y''(x)+2xy'(x)=0$.

Exo139 :

Résoudre $f'(x)=f(1-x)$ *sur* $\mathbb{R}$

Exo140 :

Déterminer les fonctions $f:\ \mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ *dérivables sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *telles que* $\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ f'(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

Exo141 :

Déterminer les fonctions f *continues de* $]0,1[$ *sur* $\mathbb{R}$ *telles que pour tout* $x\in\,]0,1[$ *on ait* $\displaystyle\int_{1-x}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=f(x)$

Exo142 :

Déterminer les fonctions de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifient :* $f''(x)+f(-x)=\cos(x)$

Exo143 :

Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continues sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t=1$

Exo144 :

Déterminer les fonctions f de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$

<u>Exo145 :</u>

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ *telles que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$

<u>Exo146 :</u>

Soit f une fonction de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) + f'(x) \right) = 0$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

<u>Exo147 :</u>

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue vérifiant l'équation :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x$$