Saint Rémi : MP (programme 2022)
David Corneillie

Chap A3 :
Séries numériques et vectorielles

Des définitions et des propriétés (Rappels de MPSI) :

Def : On dit que la série $\sum x_n$ *de réels est convergente lorsque la suite* (S_n) *définie par* $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ *est convergente. Soit* $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} x_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *la somme de cette série convergente.*

On appellera alors $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ *la somme partielle d'ordre n et* $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} x_p$ *le reste d'ordre n*

Attention : aux notations

$\sum x_n$ *correspond à la série de terme général* x_n*, on l'utilise par exemple pour dire* $\sum \frac{1}{n}$ *est divergente et* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est convergente.*

$\sum_{p=0}^{n} x_p$ *correspond à la somme partielle, c'est une addition de termes, elle existe toujours par exemple* $\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ *ou* $\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *correspond à la somme d'une série convergente, on ne peut donc l'utiliser qu'après avoir justifier la convergence, par exemple* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ *ou* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Prop : Les séries géométriques $\sum q^n$ *convergent si et seulement si* $|q| < 1$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Attention : $\sum_{n=p}^{\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$

Exemple : $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$*, la série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Dem : On utilise la formule de Taylor à l'ordre n

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$$

$$si\ x > 0,\ \left|e^x - S_n\right| \le \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \le \frac{x^n}{n!}\left(e^x - 1\right) \to 0$$

$$si\ x < 0,\ \left|e^x - S_n\right| \le \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \le \frac{(-x)^n}{n!}\left(1 - e^x\right) \to 0$$

(pour les limites nulles on utilise la formule de Stirling)

Th : Les séries de Riemann (Bernhard 1826-1866) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *CV* $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Th : Si $\sum x_n$ *converge alors* (x_n) *converge vers 0*

Dem : On a $x_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Attention : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *or* $\sum \frac{1}{n}$ *DV*

Exo : Soit une suite (u_n) *réelle positive et décroissante telle que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

<u>Comment justifier qu'une série est convergente ? :</u>

<u>Critère sur les séries de réels positifs</u>

Th : Une série à termes réels positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée : $\exists M > 0$ *tel que* $\forall n,\ S_n \le M$

Dem : $(\Leftarrow)$ *La suite* (S_n) *est croissante car* $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \ge 0$ *et majorée donc elle est convergente. Ce qui assure la convergence de la série* $\sum u_n$

$(\Rightarrow)$ *La suite* (S_n) *est croissante et convergente donc nécessairement* $S_n \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *. Ce qui assure la majoration de la suite* (S_n)

Th : Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \le v_n$ *on a alors les résultats suivants* $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV et* $\sum u_n$ *DV* $\Rightarrow \sum v_n$ *DV*

Dem : Si $u_n \le v_n$ *alors* $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p \le T_n = \sum\limits_{p=0}^{n} v_p$

Si $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow (T_n)$ *est majorée donc* (S_n) *aussi et* $\sum u_n$ *CV*

la seconde assertion est la contraposée de la première

Exemple : $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n} \le \frac{1}{n^2 \ln 2} = v_n$ *or* $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV*

$u_n = \frac{\ln n}{n} \ge \frac{\ln 2}{n}$ *or* $\sum \frac{1}{n}$ *DV* $\Rightarrow \sum u_n$ *DV*

Corollaire : $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs vérifiant* $v_n = o(u_n)$ *ou* $v_n = O(u_n)$ *alors* $\sum u_n$ *CV* $\Rightarrow \sum v_n$ *CV*

Exemple : $u_n = \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *car* $n^{\frac{3}{2}} u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ *or* $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV*

Th : Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$ *alors les deux séries sont de même nature.*

Dem : On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, pour* $n > N$ *,* $|u_n - v_n| \le \frac{1}{2} v_n \Rightarrow \frac{1}{2} v_n \le u_n \le \frac{3}{2} v_n$

Si $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum \frac{3}{2} v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV*

Si $\sum u_n$ *CV* $\Rightarrow \sum \frac{1}{2} v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum v_n$ *CV*

Exemple : $u_n=\dfrac{1}{n(n+\ln n)}\sim\dfrac{1}{n^2}$ *or* $\sum\dfrac{1}{n^2}$ *CV* $\Rightarrow\sum u_n$ *CV*

$u_n=\sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\sim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *or* $\sum\dfrac{1}{2^n}$ *CV* $\Rightarrow\sum u_n$ *CV*

Une méthode consiste à utiliser un DL en $\dfrac{1}{n}$ *afin de trouver un équivalent*

Si $x_n=a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *alors* $\begin{array}{l} si\ a\neq 0,\ \sum x_n\ DVG \\ si\ a=0,\ b\neq 0,\ \sum x_n\ DV \\ si\ a=b=0,\ \sum x_n\ CV\end{array}$

Exo: $u_n=e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=e\left(1-1+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=\dfrac{e}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

donc la série diverge

La règle de Riemann :

Si (u_n) *est une suite de réels positifs qui vérifie* $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha u_n=0$ *avec* $\alpha>1$ *alors* $\sum u_n$ *est convergente*

Ex : Si $\beta>1$, *et* $u_n=\dfrac{\ln n}{n^\beta}$, *on a* $n^\alpha u_n\to 0$ *dès que* $\beta>\alpha$, *la convergence est assurée lorsque* $\alpha>1$ *on prendra* $\alpha=\dfrac{1+\beta}{2}$

Lien suite-série :

Prop : Tout problème de convergence ou divergence de suites peut s'exprimer en terme de séries en effet si (x_n) *est une suite alors* $(x_n)CV\Leftrightarrow\sum(x_{n+1}-x_n)CV$

Dem : on définit $y_0=x_0$, $y_n=x_{n+1}-x_n$, $S_n=\sum\limits_{p=0}^{n}y_p=y_0+\sum\limits_{p=1}^{n}(x_{p+1}-x_p)=x_{n+1}$

$(x_n)CV\Leftrightarrow(S_n)\ CV\Leftrightarrow\sum y_n\ CV\Leftrightarrow\sum(x_{n+1}-x_n)\ CV$

Rem : On peut aussi prendre $(x_n)CV\Leftrightarrow\sum(x_n-x_{n-1})CV$

Exemple : $u_n=\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)=\ln(n^2+1)-\ln\left((n-1)^2+1\right)$ *soit* $v_n=\ln(n^2+1)$

$(v_n)DV\Leftrightarrow\sum u_n\ DV$

Exo : Etudier la nature de la suite définie par $a_n=(n+1)\ln(n+1)-n-\ln(n!)$

Les séries alternées :

Def : On appelle série alternée toute série $\sum x_n$ *où* $x_nx_{n+1}<0$ *(* $x_n=(-1)^n$ *)*

Th (critère spécial des séries alternées ou règle de Leibniz) : Si (ε_n) *est positive et décroissante vers 0 alors* $\sum(-1)^n\varepsilon_n$ *est convergente,* R_n *est du signe de* u_{n+1} *et on a* $\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n|\leq\varepsilon_{n+1}$.

Dem : On montre que la suite des sommes partielles (S_n) *est convergente*

$S_{2n+2}-S_{2n}=u_{2n+2}+u_{2n+1}=\varepsilon_{2n+2}-\varepsilon_{2n+1}\leq 0$

$S_{2n+1}-S_{2n-1}=u_{2n+1}+u_{2n}=-\varepsilon_{2n+1}+\varepsilon_{2n}\geq 0$

$S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}=-\varepsilon_{2n+1}\to 0$

(S_{2n}) *est décroissante,* (S_{2n+1}) *est croissante et la différence tend bien vers 0*

Ce qui assure la convergence de la suite (S_n)

On aura, de plus, $S_{2n+1} \le S \le S_{2n} \Rightarrow |R_{2n}| = S_{2n} - S \le \varepsilon_{2n+1}$ *et* $|R_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \le \varepsilon_{2n+2}$

$$R_{2n} = \sum_{p=2n+1}^{+\infty} u_p = S - S_{2n} \le 0 \;\; or\; u_{2n+1} \le 0 \;\; et\;\; R_{2n+1} = \sum_{p=2n+2}^{+\infty} u_p = S - S_{2n+1} \ge 0 \;\; or\; u_{2n+2} \ge 0$$

Rem : Si u_n *est alternée* $\varepsilon_n = |u_n|$

Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *, on pose* $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$*, la suite* (ε_n) *est positive, décroissante et tend vers 0 donc* $\sum u_n$ *est convergente*

$u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$*, on pose* $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{n}$*, la suite* (ε_n) *est positive, décroissante à partir du rang 3 et tend vers 0 donc* $\sum u_n$ *est convergente.*

Exo : Montrer que si $x \ge 0$ *alors* $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \le e^{-x} \le 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

$e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ *or si* $x \ge 0$, $u_n = (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$ *vérifie les conditions du CSSA*

$e^{-x} - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) = R_2$ *est du signe de* $-\dfrac{x^3}{3!}$ *donc négatif*

$e^{-x} - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}\right) = R_3$ *est du signe de* $\dfrac{x^4}{4!}$ *donc positif*

<u>La convergence absolue :</u>

Def : On dit que la série $\sum x_n$ *est absolument convergente si* $\sum |x_n|$ *est convergente*

Exemple : La série $\sum u_n$ *où* $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$ *est absolument convergente*

Prop : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie : CVA $\Rightarrow$ *CV*

Dem : Dans le cas réel

On a $u_n^+ = \max(0, u_n)$ *et* $u_n^- = \max(0, -u_n)$ *qui vérifient* $u_n^+ \le |u_n|$ *et* $u_n^- \le |u_n|$

$\sum u_n$ *CVA* $\Rightarrow \sum u_n^+$ *et* $\sum u_n^-$ *CV or* $u_n = u_n^+ - u_n^- \Rightarrow \sum u_n$ *CV*

Dans le cas complexe

On a $|\mathrm{Re}(u_n)| \le |u_n|$ *et* $|\mathrm{Im}(u_n)| \le |u_n|$ *or* $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n)$

Exo (utilisation des séries géométriques) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(n\theta)$

<u>I) Compléments sur les séries numériques</u>

<u>1°) La règle de d'Alembert :</u>

Th : Soit une suite de réels strictement positifs, s'il existe $k \in]0,1[$ *tel que pour* $n > n_0$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le k$ *alors la série converge et on a* $R_n \le \dfrac{k}{1-k} x_n$

Par contre si $k > 1$ *et* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \ge k$ *alors la série diverge*

Dem : Comme $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le k$ *on obtient par récurrence* $x_n \le k^n x_o$, *or* $\sum k^n$ *converge donc* $\sum x_n$ *aussi*

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} x_p \le x_n \sum_{p=1}^{\infty} k^p = x_n \frac{k}{1-k}$$

De même $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge k \Rightarrow x_n \ge x_0 k^n \Rightarrow \sum x_n$ *DV*

Règle de d'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert 1717-1783)

Soit une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$

Si L < 1 alors la série est convergente
Si L > 1 alors la série diverge

Dem : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ *tel que si* $n > N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < L + \varepsilon$

Si $L < 1$ *, on pose* $\varepsilon = \frac{1-L}{2} \Rightarrow L + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CV*

Si $L > 1$ *, on pose* $\varepsilon = \frac{L-1}{2} \Rightarrow L - \varepsilon > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DV*

Si L est infini on aura pour $n > N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 5$ *donc* $\sum u_n$ *DV*

Rem : Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *on ne peut pas conclure*

Voir les exemples avec $u_n = \frac{1}{n+1}$ *et* $\sum u_n$ *DV*, $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ *et* $\sum u_n$ *CV*

Exemple : $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \to \frac{1}{27}$ *donc* $\sum u_n$ *converge*

Exo : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2n!}$

Soit $u_n = \frac{3^n}{(2n)!} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 \Rightarrow \sum u_n$ *CV* $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exo : Soit $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs vérifiant :* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $\sum u_n$ *converge*

<u>2°) Comparaisons série et intégrale :</u>

Th : Soit f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et décroissante*

Alors la série de terme général $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ *pour* $n \ge 1$ *est convergente*

Et $\sum f(n)$ *converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur* $[a,+\infty[$

Dem : Par la décroissante de f on aura $\int_{p}^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(p) \le \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{p=0}^{n} f(p) \le f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, *on utilise le critère de comparaison*

On a immédiatement $0 \le u_n \le f(n-1) - f(n)$, *or la suite* $(f(n))$ *converge donc la série* $\sum (f(n-1) - f(n))$ *est convergente*

Rem : Ceci redonne une démonstration à la convergence des séries de Riemann

Exo : Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ *si* $n \ge 2$

<u>A retenir</u> : Soit f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et décroissante alors*

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{p=0}^{n} f(p) \le f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dem : La fonction est décroissante, on obtient avec les aires de rectangles entre $p-1$, p *et* $p+1$

$$\int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(p) \le \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{p=0}^{n} f(p) = f(0) + \sum_{p=1}^{n} f(p) \le f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exo : Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln k}$

Th : Soit f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et décroissante, si* $\sum f(n)$ *est convergente on a l'encadrement suivant* $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \le \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \le \int_{n}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

Dem : La fonction est décroissante, on obtient avec les aires de rectangles entre $p-1$, p *et* $p+1$

$$\int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(p) \le \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \le \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'existence de $\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est assurée par l'intégrabilité de f sur* $[n,+\infty[$

Exo : Déterminer un équivalent à l'infini de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ *et de* $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$

<u>3°) Comparaisons des restes et sommes partielles</u>

Th : Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries dont* $\sum v_n$ *est à termes positifs telles que* $u_n = o(v_n)$

Dans le cas où $\sum v_n$ *est convergente on a* $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p = o\left(\sum_{p=n+1}^{\infty} v_p\right)$

Dans le cas où $\sum v_n$ *est divergente on a* $\sum_{p=0}^{n} u_p = o\left(\sum_{p=0}^{n} v_p\right)$

Dem : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ *tel que si* $n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon v_n$

Dans le cas où $\sum v_n$ *est convergente, si n > N*

$$\left|\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p\right| \le \sum_{p=n+1}^{\infty} |u_p| \le \varepsilon \sum_{p=n+1}^{\infty} v_p \Rightarrow R_n = o(R'_n)$$

Dans le cas où $\sum v_n$ *est diverge, alors* $S'_n \to +\infty$

$$\left|\sum_{p=0}^{n} u_p\right| \le \sum_{p=0}^{N}\left|u_p\right| + \sum_{p=N+1}^{n}\left|u_p\right| \le \sum_{p=0}^{N}\left|u_p\right| + \varepsilon \sum_{p=N+1}^{n}\left|v_p\right| \le \sum_{p=0}^{N}\left|u_p\right| + \varepsilon \sum_{p=0}^{n}\left|v_p\right|$$

Alors $$\frac{\left|\sum_{p=0}^{n} u_p\right|}{\sum_{p=0}^{n} v_p} \le \frac{\sum_{p=0}^{N}\left|u_p\right|}{\sum_{p=0}^{n} v_p} + \varepsilon \to 0 \Rightarrow S_n = o\left(S'_n\right)$$

Exo : Soit (u_n) *une suite de réels qui converge vers L, montrer que la suite de terme général* $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_p$ *converge aussi vers L (c'est le théorème de Césaro)*

On pose $v_n = |u_n - L| = o(1)$, *or* $\sum 1$ *DV* $\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} v_p = o\left(\sum_{p=1}^{n} 1\right) = o(n)$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_p - L\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(u_p - L\right)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left|u_p - L\right| = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} v_p = o(1)$$

Th : Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$

Dans le cas où une des deux séries est convergente alors on a $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p \sim \sum_{p=n+1}^{\infty} v_p$

Dans le cas où une des deux séries est divergente alors on a $\sum_{p=0}^{n} u_p \sim \sum_{p=0}^{n} v_p$

Dem : On utilise $u_n - v_n = o(u_n)$

Application : On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

Dem : $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ *or* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge*

$$\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \ln(n+1) \sim \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

La constante d'Euler : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \in \left]0,1\right[$, *donc* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

Dem : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ *et on montre que* $\sum v_n$ *converge*

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum\left(u_n - u_{n-1}\right)$ *CV* $\Rightarrow (u_n)$ *CV , on notera* γ *sa limite (on l'appelle la constante d'Euler)*

La fonction f : $t \mapsto \frac{1}{t}$ *est positive décroissante sur* $\left[1,+\infty\right[$

$$\int_{p}^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(p) \le \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow 1 + \int_{2}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(1) + \sum_{p=1}^{n} f(p) = 1 + f(2) + \sum_{p=3}^{n} f(p) \le \frac{3}{2} + \int_{2}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$1 + \ln(n) - \ln 2 \le 1 + \ln(n+1) - \ln 2 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le \frac{3}{2} + \ln(n) - \ln 2 \Rightarrow 0 < 1 - \ln 2 \le u_n \le \frac{3}{2} - \ln(2) < 1$$

donc $\gamma \in \left]0,1\right[$

Exo : Déterminer la limite de $\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$

Application : la démonstration de la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

Dem : On considère $w_n = \int_{n-1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t - \ln(n)$ *pour* $n \geq 2$ *:*

$w_n = n\ln n - n - (n-1)\ln(n-1) + n - 1 - \ln n = -1 - (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *Donc*

$\sum\left(-\frac{1}{2n} - w_n\right)$ *est convergente*

Notons $\sum_{p=2}^{n}\left(-\frac{1}{2p} - w_p\right) = S + o(1)$

$\sum_{p=2}^{n} w_p = \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t - \ln(n!) = n\ln n - n + 1 - \ln(n!)$

$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 - \sum_{p=2}^{n} w_p = n\ln - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p} + S + o(1)$

$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\gamma + S + o(1) = n\ln n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln n + L + o(1)$

Finalement, $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{L+o(1)} \sim e^L n^n \sqrt{n}e^{-n}$ *notons* $K = e^L$

On considère maintenant $C_n = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow C_n = \frac{n-1}{n}C_{n-2}$

D'où $C_{2p} = \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2}\frac{\pi}{2}$ *et* $C_{2p+1} = \frac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}$

Or $C_{n+2} \leq C_{n+1} \leq C_n \Rightarrow \frac{C_{n+2}}{C_n} = \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{C_{n+1}}{C_n} \leq 1 \Rightarrow C_n \sim C_{n+1}$

Finalement, $C_{2p}C_{2p+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2p+1} \sim \left(C_{2p}\right)^2 \Rightarrow C_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$

$$\left.\begin{array}{l}(2p)! \sim K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}\\ \left(2^p p!\right)^2 \sim K^2 2^{2p} p^{2p} e^{-2p} p\end{array}\right\} \Rightarrow C_{2p} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{K}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}} \Rightarrow K = \sqrt{2\pi}$$

4°) Exemple de calcul de somme :

Un exemple intéressant :

$U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \Rightarrow S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$ *ainsi la série converge vers* $\frac{1}{4}$

Exo (utilisation de l'exponentielle) : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2 - 3n - 1}{(n)!}$

Exo (utilisation de la constante d'Euler) : Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(4n^2 - 1\right)} = 2\ln 2 - 1$

Exo : Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$

Exo (utilisation des séries alternées) : Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

II) Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie :

1°) Définition :

Def : E un espace vectoriel normé de dimension finie, $\left(x_n\right)$ *une suite de points de E, on dit que la série de terme général* x_n*, notée* $\sum x_n$*, converge lorsque la suite* $\left(S_n\right)=\left(\sum_{p=0}^{n} x_p\right)$ *est convergente. Soit* $B=\left\{e_1,e_2,...,e_p\right\}$ *une base de E où p est la dimension de E*

La convergence de la série de terme général $x_n=\sum_{i=1}^{p} x_{i,n}e_i$ *est équivalente à la convergence des p séries coordonnées* $\sum x_{i,n}$

Exemple : La série $\sum A_n$ *où* $A_n=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{n} & \frac{1}{n^3} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix}$ *est convergente*

Exemple : La série $\sum z_n$ *où* $z_n=\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}i$ *est convergente et* $\sum e^{in\alpha}$ *est divergente*

2°) Convergence absolue :

Def : On dit que la série $\sum x_n$ *est absolument convergente si* $\sum \left\|x_n\right\|$ *est convergente*

Prop : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie : CVA $\Rightarrow$ *CV*

Dem : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\left|u_{n,i}\right| \le \left\|u_n\right\| = \max_j \left|u_{n,j}\right| \Rightarrow \forall i,\ \sum u_{n,i}$ *CVA dans* $\mathbb{R}$

Application : Le théorème du point fixe dans un espace de dimension finie
Toute fonction contractante en dimension finie admet un unique point fixe

Dem : f est donc une contraction dans un espace de dimension finie
On considère $x_0 \in E$ *et* $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$
On a $\left\|x_{n+1}-x_n\right\|=\left\|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right\| \le k\left\|x_n-x_{n-1}\right\|$
On pose $w_n=x_{n+1}-x_n$, $\left\|w_{n+1}\right\| \le k\left\|w_n\right\|$ *avec* $k<1 \Rightarrow \sum w_n$ *CVA donc CV*
Finalement la suite $\left(x_n\right)$ *est convergente et sa limite vérifie* $L=f\left(L\right)$ *car f est continue*
Reste à établir l'unicité, on suppose qu'il existe deux points fixes a et b alors
$\left\|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right\|=\left\|a-b\right\| \le k\left\|a-b\right\|$ *où* $k<1 \Rightarrow a=b$

3°) Les séries géométriques :

On se place dans une algèbre normée de dimension finie (c'est-à-dire possédant une norme qui vérifie $\left\|u.v\right\| \le \left\|u\right\|\left\|v\right\|$ *) , si 1 est l'élément neutre de cette algèbre on a*

$\forall u \in A$ *tel que* $\left\|u\right\|<1$, $\sum u^n$ *est convergente et* $\left(1-u\right)$ *est inversible*

On a alors $\left(1-u\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} u^n$

Dem : On a $\left\|u^n\right\| \le \left\|u\right\|^n$ *or* $\left\|u\right\|<1 \Rightarrow \sum \left\|u\right\|^n$ *CV* $\Rightarrow \sum u^n$ *CVA*

$$(1-u)\sum_{p=0}^{n} u^p = 1-u^{n+1} \to 1$$

Exemple : Sur l'ensemble des complexes $\sum z^n$ *CV vers* $\dfrac{1}{1-z} \Leftrightarrow |z|<1$

Th : $M_n(\mathbb{R})$ *est une algèbre normée*

Dem : Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ *on note* $\|A\| = \sqrt{tr\left({}^t AA\right)}$.

On va montrer que $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

Posons $C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ *, avec le choix de la norme* $\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2$

Considérons un instant le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ *, il vérifie l'inégalité de Cauchy Schwarz*

$$\langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Donc $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \Rightarrow \|AB\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 = \|A\|^2\|B\|^2$

Exemple : Soit une matrice A qui vérifie $\|A\|<1$ *alors* $I_n - A$ *est inversible*

$\sum A^n$ *CV vers* $(I_n - A)^{-1}$

<u>*4°) Séries exponentielles :*</u>

Def : Dans une algèbre A normée de dimension finie, la série de terme général $\dfrac{u^n}{n!}$, $\forall u \in A$ *est absolument convergente et on pose :* $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{u^n}{n!} = \exp(u)$

Dem : On pose $u_n = \left\|\dfrac{u^n}{n!}\right\| \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{\|u\|}{n} \to 0 < 1$ *ce qui assure la convergence absolue*

Exemple : Calcul de l'exponentielle d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = A+B,\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*III) Rappel sur la sommabilité d'une famille de complexes*</u>

<u>*1°) Familles sommables de réels positifs :*</u>

Def : La famille $(u_i)_{i\in I}$ *de réels positifs est sommable si l'ensemble des sommes* $\sum_{i\in J} u_i$ *où J est une partie finie de I, est majoré*

Dans ce cas on appellera la somme de la famille $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\subset I}\sum_{i\in J} u_i$

Rem : Si $I = \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum u_n$ *est convergente*

Th de sommation par paquets : Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs, soit A une partie de* $\mathbb{N}$*, si* $(I_n)_{n\in A}$ *est une partition de I alors la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si pour tout n la famille* $(u_i)_{i\in I_n}$ *est sommable et la famille* $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in A}$ *est sommable .*

Alors on aura si $A=\mathbb{N}$, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$, $A=[\![1,k]\!]$, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Rem : La famille $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable signifie que* $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ *converge*

Ex : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ *sachant que* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

<u>2°) Familles sommables de complexes</u>

Def : La famille $(u_k)_{k\in I}$ *de complexes est sommable si et seulement si la famille* $(|u_k|)_{k\in I}$ *est sommable*

Rem : Lorsque $I=\mathbb{N}$*, la famille* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum u_n$ *CVA*

Prop et def : $(u_k)_{k\in I}$ *de réels est sommable si et seulement si* $(u_k^+)_{k\in I}$ *et* $(u_k^-)_{k\in I}$ *sont sommables.*

Alors on aura par définition $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^-$

Dem : $(\Rightarrow)$ *On a* $0\le u_k^+ \le |u_k|$

$\forall J\subset I$, *de cardinal fini :* $\sum_{k\in J} u_k^+ \le \sum_{k\in J}|u_k| \le \sum_{k\in I}|u_k| = M \Rightarrow (u_k^+)_{k\in I}$ *est sommable*

De même $0\le u_k^+ \le |u_k|$ *donc* $(u_k^-)_{k\in I}$ *est sommable*

$(\Leftarrow)$ *On a* $|u_k| = u_k^+ + u_k^-$

$\forall J\subset I$, *de cardinal fini :* $\sum_{k\in J}|u_k| \le \sum_{k\in J} u_k^+ + \sum_{k\in J} u_k^- \le \sum_{k\in I} u_k^+ + \sum_{k\in I} u_k^- = M_1 + M_2$

Donc $(u_k)_{k\in I}$ *est sommable*

Prop : $(u_k)_{k\in I}$ *de complexes est sommable si et seulement si* $(\mathrm{Re}(u_k))_{k\in I}$ *et* $(\mathrm{Im}(u_k))_{k\in I}$ *sont sommables.*

Alors on aura par définition $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I}\mathrm{Re}(u_k) + i\sum_{k\in I}\mathrm{Im}(u_k)$

Dem : $(\Rightarrow)$ *On a* $0\le|\mathrm{Re}(u_k)|\le|u_k|$

$\forall J\subset I$, *de cardinal fini :* $\sum_{k\in J}|\mathrm{Re}(u_k)| \le \sum_{k\in J}|u_k| \le \sum_{k\in I}|u_k| = M \Rightarrow (\mathrm{Re}(u_k))_{k\in I}$ *est sommable*

De même $0\le|\mathrm{Im}(u_k)|\le|u_k|$ *donc* $(\mathrm{Im}(u_k))_{k\in I}$ *est sommable*

$(\Leftarrow)$ *On a* $|u_k|\le|\mathrm{Re}(u_k)|+|\mathrm{Im}(u_k)|$

$\forall J\subset I$, *de cardinal fini :* $\sum_{k\in J}|u_k| \le \sum_{k\in J}|\mathrm{Re}(u_k)| + \sum_{k\in J}|\mathrm{Im}(u_k)| \le \sum_{k\in I}|\mathrm{Re}(u_k)| + \sum_{k\in I}|\mathrm{Im}(u_k)| = M_1 + M_2$

Donc $(u_k)_{k\in I}$ *est sommable*

Th (de sommation par paquets) : Soit I un ensemble dénombrable, soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de complexes, soit A une partie de* $\mathbb{N}$, *si* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une partition de I alors la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si* $\forall n\in\mathbb{N}$ *la famille* $(|u_i|)_{i\in I_n}$ *est sommable et la famille* $\left(\left|\sum_{i\in I_n}u_i\right|\right)_{n\in A}$ *est sommable*

Alors on aura si $A=\mathbb{N}$, $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$, $A=[\![1,k]\!]$, $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$

Rem : La famille $\left(\left|\sum_{i\in I_n}u_i\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable signifie* $\sum\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$ *converge absolument*

Exemple de calcul : Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *sachant que* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ *et calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)!}$

Th : Soit σ *une bijection de I, alors la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si la famille* $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ *est sommable et on aura* $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}$

Dem $(\Rightarrow)$ *La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable donc il existe M >0 tel que pour tout partie finie J de I on ait* $\sum_{i\in J}|u_i|\le M$ *, pour tout bijection* σ *de I, on note* $v_i=u_{\sigma(i)}$, *si J est fini alors* $\sigma(J)$ *l'est aussi alors* $\sum_{i\in J}|v_i|=\sum_{k\in\sigma(J)}|u_k|\le M$ *donc* $(v_i)_{i\in I}$ *est sommable*

$(\Leftarrow)$ *On applique le sens direct avec la bijection* σ^{-1}

Il reste à justifier que $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}$ *, on le prouvera dans le cas réel positif*

$\forall J\subset I\ \sum_{i\in J}u_{\sigma(i)}\le\sum_{i\in I}u_i\Rightarrow\sum_{i\in I}u_{\sigma(I)}\le\sum_{i\in I}u_i$

L'inégalité dans l'autre sens s'établit en utilisant σ^{-1}

L'égalité dans le cas réel se démontre en utilisant $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_i^+-\sum_{i\in I}u_i^-$

Dans le cas complexe on utilisera $\sum_{k\in I}u_k=\sum_{k\in I}\mathrm{Re}(u_k)+i\sum_{k\in I}\mathrm{Im}(u_k)$

3°) Des exemples de familles non sommables

Exo 1 : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$, *or la famille n'est pas sommable car si on considère la bijection de* $\mathbb{N}$

$\sigma:\begin{cases}n\mapsto 2p\ \text{ si } n=3p\\ n\mapsto 4p+1\ \text{ si } n=3p+1\\ n\mapsto 4p+3\ \text{ si } n=3p+2\end{cases}$, *on aura alors* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1}=\frac{1}{2}\ln 2$

Exo 2 : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ u_{p,q}=\frac{1}{p^2-q^2}$ *si* $p\ne q$ *et* $u_{p,p}=0$

On obtient $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\frac{\pi^2}{8}$ *et* $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=-\frac{\pi^2}{8}$

Ainsi $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *n'est pas sommable*

4°) Séries doubles de réels positifs :

On considère le cas particulier des familles sommables en prenant $I = \mathbb{N}^2$

Def : Soit $\left(u_{p,q}\right)$ *où* $\left(p,q\right) \in \mathbb{N}^2$ *une famille de réels ou complexes, elle est dite sommable s'il existe un réel M tel que pour toute partie finie J de* $\mathbb{N}^2$, $\sum_{(p,q)\in J} \left|u_{p,q}\right| \leq M$

On notera alors sa somme $S = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sup_{J\subset\mathbb{N}^2} \sum_{(p,q)\in J} u_{p,q}$

(on dit aussi que la série double est convergente)

Th : Soit $\left(u_{p,q}\right)$ *où* $\left(p,q\right) \in \mathbb{N}^2$ *une famille de réels ou complexes, elle est sommable si et seulement si la série de terme général* $w_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q}$ *est convergente absolument*

On a alors $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$

Dem : C'est un cas particulier du théorème de sommation par paquets
$I = \mathbb{N}^2$ *et* $I_n = \left\{ \left(p,q\right) \in I, p+q=n \right\}$ *forme bien une partition de I*
Pour tout n on a $Card\left(I_n\right) = n+1$
Donc la famille $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in I_n}$ *est toujours sommable, ce qui assure l'existence de* w_n
Par le théorème de sommation par paquets, $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *sommable si et seulement si* $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable (c'est-à-dire* $\sum w_n$ *CVA)*

Exo : Etudier la famille définie par $U_{p,q} = \dfrac{(p+q)!}{p!q!} \left(\dfrac{1}{4} \right)^{p+q}$

Th (inversion des sommations des suites doubles de réels positifs dit de Fubini)
Soit $\left(u_{p,q}\right)$ *où* $\left(p,q\right) \in \mathbb{N}^2$ *une famille de réels positifs. Elle est sommable si et seulement si pour tout q fixé dans* $\mathbb{N}$ *la série* $\sum_p u_{p,q}$ *est convergente vers* $S(q) = \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ *et que la série* $\sum S\left(q\right)$ *soit convergente*
(on a la même caractérisation en permutant p et q)

On a alors $\sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$

Dem : On utilise deux fois le théorème de sommation par paquets
Soit pour q fixé, $I_q = \mathbb{N} \times \left\{q\right\}$, *la famille* $\left(I_q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ *forme une partition de* $\mathbb{N}^2$
Donc $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable si et seulement si* $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in I_q}$ *est sommable vers* $S\left(q\right)$ *et* $\left(S\left(q\right)\right)_{q\in\mathbb{N}}$ *est sommable. On aura alors* $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} S\left(q\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right)$
Soit pour p fixé, $J_q = \left\{p\right\} \times \mathbb{N}$, *la famille* $\left(J_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *forme une partition de* $\mathbb{N}^2$
Donc $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable si et seulement si* $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in J_p}$ *est sommable vers* $T\left(p\right)$ *et* $\left(T\left(p\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *est sommable. On aura alors* $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} T\left(p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right)$

Rem : Dans le cas où $\left(u_{p,q}\right)$ *où* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ *une famille de réels ou de complexes, on applique le théorème précédent à la famille* $\left(\left|u_{p,q}\right|\right)$ *où* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

Exo : Etudier la sommabilité de la famille $u_{p,q}=\dfrac{1}{p^q}$ *pour* $p\geq 2$, *et* $q\geq 2$

Calculer la somme de cette famille

Exo : Soit la famille définie par $u_{p,q}=\dfrac{1}{p^2+q^2}$, *étudier la sommabilité*

<u>*5°) Le cas du produit de Cauchy de 2 séries absolument convergentes :*</u>

Def et Th : Soient deux séries absolument convergentes $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$

On définit le produit de Cauchy par la série de terme général $w_n=\sum\limits_{p+q=n}u_p v_q$.

Alors la série $\sum w_n$ *est absolument convergente et on a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_n=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n\right)$

> *Dem : La convergence est établie en utilisant le théorème de Fubini à la famille* $x_{p,q}=u_p v_q$. *L'égalité découle ensuite du résultat de la sommation par paquets*

Exo : Soit $x\in\left]-1,1\right[$ *calculer sous forme d'une somme* $\dfrac{e^x}{1+x}$

Exo : Soit la série de terme général $w_n=\dfrac{1}{3^n}\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{6^p}{(p)!}$

Justifier que cette série converge et préciser sa somme

Exo : Etudier la série de terme général $w_n=\sum\limits_{p+q=n}\dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}}\dfrac{(-1)^q}{\sqrt{q}}$, *pour* $n\neq 0$

Prop : Si a et b commutent on retrouve la formule $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$

> *Dem : Les séries* $\sum\dfrac{a^n}{n!}$ *et* $\sum\dfrac{b^n}{n!}$ *convergent absolument, on peut effectuer leur produit de Cauchy,* $w_n=\sum\limits_{p+q=n}\dfrac{a^p}{p!}\dfrac{b^q}{q!}=\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{a^p b^{n-p}}{p!(n-p)!}=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}=\dfrac{(a+b)^n}{n!}$
>
> *D'où* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_n=\exp(a+b)$

Def : Dans le cas complexe, on définit $\exp(z)$ *comme le complexe de module* $e^{\mathrm{Re}(z)}$ *et d'argument* $\mathrm{Im}(z)$

Par prolongement on définit également le sin, cos, sh *et* ch *d'un complexe*

Exo : Résoudre l'équation $\cos(z)=2$ *dans* $\mathbb{C}$

Exo : Retour à l'exponentielle de matrice avec $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -15 & -6 & 11\\ -14 & -6 & 11\end{pmatrix}$, *on utilisera* $(A-I)^3=0$