Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap A3 : Exercices vus en classe ou à faire

I) II) Séries numériques

Exo1 :

Déterminer la nature des séries de terme général

$U_n = \frac{1}{\sqrt[2]{n+1}}$; $U_n = \frac{1}{n(n+\ln n)}$; $U_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Exo2 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exo3 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$

Exo4 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = \frac{n^n}{(n+1)(n+2)....(2n)}$

Exo5 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Exo6 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n+1)}$

Exo7 :

Calculer la somme de la série de terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exo8 :

Calculer la somme de la série de terme général $U_n = Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$

Exo9 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

Exo10 :

Déterminer la nature de la série de terme général $U_n = 1 - n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

Exo11 :

Calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)}$

Exo12 :

Etudier la convergence des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln n}$, $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$

Exo13 :
Etudier la nature des séries suivantes

$u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $u_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2+(n-p)^2}$

Exo14 :
On pose $a_n = (n+1)\ln(n+1) - n - \ln(n!)$ *et* $u_n = a_n - a_{n-1}$

Quelle est la nature de la série de terme général u_n, *montrer alors la divergence de la suite de terme général* a_n

On pose $b_n = a_n + x\ln(n+1)$ *et* $v_n = b_n - b_{n-1}$, *déterminer x pour la série de terme général* v_n *converge*

Exo15 :
Le but de cet exercice est d'étudier un complément de la règle de d'Alembert pour les séries numériques lorsque cette règle ne permet pas de conclure directement.

Soit $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs vérifiant* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$, α *étant un réel donné et* v_n *le terme général d'une série absolument convergente.*

On pose $w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{\alpha}{n}$ *, montrer que la série de terme général* w_n *converge absolument.*

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *et* $T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ *, exprimer* $\ln(u_{n+1})$ *en fonction de* S_n, T_n , α *et* u_1.

Montrer que la suite $(S_n - \ln n)_{n>0}$ *est convergente, on notera* γ *sa limite*

Déterminer un nombre réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ *lorsque* $n \to +\infty$

En utilisant cette technique, déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$.

Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$

Exo16 :
Trouver un équivalent à l'infini de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Exo17 :
Déterminer a et b pour la série de terme $w_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ *soit convergente*

Exo18 :
Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2\ln 2 - 1$

Exo19 :
Les séries de Bertrand (Joseph 1822-1900)

$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *CV* $\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ *ou* $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

Exo20 :
Soit $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)$, *montrer que cette suite converge*

Exo21 :
Soit $x_0 \in]0,1[$ *et* $x_{n+1} = \frac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Etudier la nature de la suite (x_n)

Soit $z_n = \sqrt{1 - x_n^{\ 2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *étudier la nature de la série de terme général* z_n

Prouver la convergence de la série $\sum w_n$ *où* $w_n = \ln\left(\dfrac{2}{1+x_n}\right)$

Exo22 :

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $S_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$

Justifier l'existence d'un réel γ *tel que* $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exo23 :

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n^2 - 3n - 1}{n!}$

Exo24 :

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n-1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

Exo25 :

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$

Exo26 :

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n+1}{3^n}$

Exo27 :

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}$

Exo28 :

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(n\theta)$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(n\theta)$ *pour* $x \in \left]-1,1\right[$

Exo29 :

Soit une suite réelle (u_n) *telle que* $u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n+3}$

Montrer que la série $\sum u_n$ *converge*

Exo30 :

Soit une suite (u_n) *réelle strictement positive telle que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{2}{n} + \underset{\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Etudier la nature de la série $\sum u_n$

Exo31 :

Discuter suivant les valeurs de l'entier p la nature de la série $\sum u_n$, $u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{(n+p)!}$

Exo32 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{t \sin t}{(1+t^2)} \mathrm{d}t$

Exo33 :

Donner un équivalent à l'infini de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2 \ln k}$

Exo34 :

Soit $\sum a_n$ *une série de réels à termes positifs et la suite* (u_n) *telle que* $u_0 \geq 0$

et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^{\ 2} + a_n^{\ 2}}\right)$

Montrer que si $\sum a_n$ *converge alors la suite* (u_n) *converge*

Exo35 :

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $S(n) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n}$

Montrer que $S(n) \leq \frac{3}{2^n}$ *, en déduire la nature de la série de terme général* $\frac{S(n)}{n^\alpha}$

Exo36 :

Soit la suite (u_n) *telle que* $u_1 \in]0,\pi[$ *et* $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Etudier la nature de la série de terme général u_n *(on pourra introduire* $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ *)*

Exo37 :

Déterminer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1}$

Exo38 :

Soit la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$ *. Etudier la nature de cette suite*

Exo39 :

On considère $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}$*. Montrer que* $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$

Après avoir justifié la convergence de la série $\sum R_n$ *, calculer* $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$

Exo40 :

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Exo41 :

Déterminer un équivalent à l'infini de $S_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p \ln p}$

Exo42 :

Soit une suite (u_n) *telle que* $\sum n^2 u_n$ *converge, montrer que* $\sum u_n$ *converge*

Exo43 :

On donne (x_n) *une suite à valeurs dans* $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

On définit alors la suite (y_n) *par* $y_0 = x_0$ *et* $y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_n}{1 + x_{n+1} y_n}$

Montrer que la suite (y_n) *converge*

Etudier la nature de la série de terme général $1 - y_n$

En déduire la limite de la suite (y_n)

Exo44 :

Soit la suite définie par $u_0 = 5$, $u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 5u_n + 8$

Montrer que la suite (u_n) *tend vers l'infini*

Montrer que $\frac{(-1)^n}{u_n-3}=\frac{(-1)^n}{u_n-2}-\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}-2}$

Déterminer la nature et la somme de la série $\sum\frac{(-1)^n}{u_n-3}$

<u>*Exo45 :*</u>

Soit $v_n=\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}+p^{\frac{1}{2}}}$ *déterminer un équivalent simple de* v_n

<u>*Exo46 :*</u>

Soit une suite (u_n) *réelle positive et décroissante telle que la série* $\sum u_n$ *converge*

Montrer que $u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit (v_n) *telle que* $u_n=\frac{1}{1+n^2v_n}$*, montrer que* $\sum v_n$ *diverge*

<u>*Exo47 :*</u>

Soient a et b deux réels non entiers naturels tels que $a-b>1$

On pose $u_0\neq 0$ *et* $u_{n+1}=\frac{n-a}{n-b}u_n$*. Montrer que* $\sum u_n$ *converge*

(on pourra introduire à partir d'un certain rang $v_n=n^{\alpha}u_n$ *avec* α *judicieusement choisi)*

<u>*Exo48 :*</u>

Soit $T_n=\sum_{p=n+1}^{\infty}(-1)^p\left[\frac{\ln(p)}{p}-\frac{\ln(p+1)}{p+1}\right]$

Justifier que la série $\sum T_n$ *converge absolument, on pourra utiliser sans la démontrer, l'inégalité suivante* $\frac{\ln(p+1)}{p+1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\ln p}{p}+\frac{\ln(p+2)}{p+2}\right)$ *pour* $p\geq 5$

On note $v_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ *et* $R_n=\sum_{p=n+1}^{\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p}$

Exprimer T_n *en fonction de* R_n *et* v_{n+1}

Que peut on en déduire pour la série $\sum R_n$ *?*

<u>*Exo49 :*</u>

On considère pour tout n : $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$

Prouver que $R_{2n+1}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}$

Pour tout entier k > 0 , justifier l'encadrement suivant :

$$\int_{k+2}^{k+3}\frac{1}{4t^3}dt\leq\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\leq\int_{k}^{k+1}\frac{1}{4t^3}dt$$

En déduire un encadrement de R_{2n+1} *pour tout* $n\geq 1$

En déduire les limites respectives des suites

<u>*Exo50 :*</u>

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Exo51 :

Soit la suite $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{3p}=\dfrac{-2}{3p},\ \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=\dfrac{1}{3p+1},\ a_{3p+2}=\dfrac{1}{3p+2}$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3p}a_k=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}$. *Déterminer la limite de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{3p}a_k$ *lorsque p tend vers* $+\infty$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}a_k$ *est convergente et préciser sa somme*

On considère $u_k=\dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ *pour* $k\geq 1$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}u_k$ *converge et que sa somme vaut* $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Exo52 :

Soit la suite définie par $u_n=\displaystyle\int_1^n\frac{\sin t}{t}\mathrm{dt}$, *montrer que cette suite est convergente*

Exo53 :

On considère la suite de réels $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\sum_{p=0}^{n}a_p^2=1$

Quelle est la nature de $\sum a_n^2$

On pose $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}a_p^2$ *montrer que* $S_{n-1}\sim S_n$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^3-S_{n-1}^3$

Donner un équivalent de a_n

Exo54 :

Soit une suite de terme général $u_n\geq 0$ *telle que* $\sum u_n$ *converge*

On pose $\sigma_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k$

Montrer que la suite $\left(\sigma_n\right)$ *converge vers 0*

En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma_n}{n+1}$ *et préciser sa somme*

Exo55 :

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0\in\left]0,1\right[,\ u_{n+1}=u_n-u_n^2$

Etudier la nature de cette suite

Montrer que la série de terme général u_n^2 *est convergente*

Que peut on dire des séries $\sum\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *et* $\sum u_n$

Exo56 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}$

Exo57 :

Etudier la nature de la suite $\left(u_n\right)$ *définie par* $u_0=0$ *et* $\forall n\geq 1,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$

Exo58 :

On note L^2 *l'ensemble des suites de réels* $\left(x_n\right)$ *telles que* $\sum {x_n}^2$ *converge*

Montrer que si $\left(x_n\right)$ *et* $\left(y_n\right)$ *sont deux suites de* L^2 *alors* $\sum x_ny_n$ *est convergente*

En déduire que L^2 est un espace vectoriel

III) Familles sommables, séries doubles et produit de Cauchy

Exo59 :

Soit $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ *pour* $x>1$. *Montrer que* $\sum_{q=2}^{\infty}\left(\zeta(q)-1\right)=1$

Exo60 :

Pour $n\geq 1$ *et* $k\geq 2$ *, on définit* $u_{n,k}=\frac{1}{k^3(n+3)^k}$.

Etudier la sommabilité de la famille $\left(u_{n,k}\right)_{n\geq 1,k\geq 2}$

Exo61 :

Etudier la série double définie par $U_{p,q}=\frac{(p+q)!}{p!q!}\left(\frac{1}{3}\right)^{p+q}$

Exo62 :

$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}=\frac{1}{p^2-q^2}$ *si* $p\neq q$ *et* $u_{p,p}=0$

Justifier l'existence et calculer $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$

Que pensez vous de $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$ *?*

Exo63 :

Etudier la sommabilité de la famille $U_{p,q}=\frac{1}{p^2+q^2}$, $p\geq 1$, $q\geq 1$

Exo64 :

Soit la série de terme général $w_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{5^{n-p}}{2^p(n-p)!}$

Justifier que cette série converge et préciser sa somme

Exo65 :

Soit $d(n)$ *le nombre de diviseurs de l'entier n non nul*

Prouver la convergence de la série de terme général $d(n)e^{-n}$

Justifier l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty}d(n)e^{-n}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}$

Exo66 :

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n)!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(5n)!}$

Exo67 :

Etudier la série de terme général $w_n=\sum_{p+q=n}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}$ *pour* $n\neq 0$

Exo68 :

Soit $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *, on pose pour tout entier n,* $v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}2^k u_k$

Montrer que si $\sum u_n$ *converge absolument alors* $\sum v_n$ *converge absolument et préciser sa somme en fonction de celle de* $\sum u_n$

On suppose que $u_n = o(1)$, *quelle est alors la limite de la suite* (v_n)

Montrer que si $\sum u_n$ *converge alors* $\sum v_n$ *converge et préciser sa somme en fonction de celle de* $\sum u_n$

<u>Exo69 :</u>

Soit α *un réel strictement positif*

Montrer l'existence de $f(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n}$, *on ne cherchera pas à calculer* $f(\alpha)$

Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right) e^{-n\alpha}$ *pour* $n \geq 1$, *puis exprimer sa somme en fonction de* α

<u>Exo70 :</u>

Soit σ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *On pose* $u_n = \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$

Etudier la nature de la série de terme général u_n