

**Chap A4 :  
Suites et séries de fonctions  
Permutations limite et intégrale**

**1) Les suites de fonctions :**

1°) La convergence simple :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $F$  l'ensemble des fonctions de  $I$  sur  $E$ , on peut munir  $F$  d'une structure d'espace vectoriel

Def : Une suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur  $I$  à valeurs dans  $E$  est simplement convergente sur  $I$  si et seulement si la suite  $(f_n(x)), \forall x \in I$  est convergente dans  $E$

i.e. :  $(f_n)$  CVS vers  $f$  sur  $I \Leftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que si  $n > N$  alors  $\|f_n(x) - f(x)\|_E < \varepsilon$

Ex : Soit  $f_n(x) = \frac{x^n+1}{x^2+1}$ ,  $(f_n)$  CVS sur  $] -1, 1[$  vers  $f: \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

2°) Convergence uniforme :

Def : La suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur  $I$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{x \in I} \|f_n(x) - f(x)\| \right] = 0$$

Exemple : Soit  $f_n(x) = \frac{x^n+1}{x^2+1}$ ,  $(f_n)$  CVU sur  $[-a, a]$  vers  $f$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  où  $a < 1$ , pas sur  $] -1, 1[$

Exemple : Soit  $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , cette suite converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$  car  $\|f_n\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) \rightarrow 0$

Exo : Etudier la CVU de  $f_n(x) = n x e^{-nx} \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$

Rem : Si on munit  $F$  de la norme  $\|f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E$  lorsque  $f$  est bornée, la convergence uniforme

d'une suite de fonctions est la convergence au sens de cette norme

i.e. :  $(f_n)$  CVU vers  $f$  sur  $I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que si  $n > N$ ,  $\|f_n - f\|_{\infty, I} < \varepsilon$

3°) Propriétés :

Prop :  $(f_n)$  CVU vers  $f$  sur  $I \Rightarrow (f_n)$  CVS vers  $f$  sur  $I$

Dem :  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon$

Conséquence : La limite simple est la seule candidate à être la limite uniforme

Prop :  $(f_n)$  CVU vers  $f$  sur  $I, (g_n)$  CVU vers  $g$  sur  $I \Rightarrow (\lambda f_n + g_n)$  CVU vers  $\lambda f + g$  sur  $I$

Dem :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que si  $n > N$ ,  $\|f_n - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}, \|g_n - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$

Or  $\|\lambda f_n + g_n - \lambda f - g\|_{\infty} \leq |\lambda| \|f_n - f\|_{\infty} + \|g_n - g\|_{\infty} < \varepsilon$

4°) Convergence uniforme sur toutes parties compactes :

Def : Une suite de fonctions définies sur  $I$ , qui converge simplement vers  $f$  sur  $I$ , converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $I$ , si la suite de fonctions  $\left( \frac{f_n}{K} \right)$  des restrictions de  $(f_n)$  sur  $K$  converge

uniformément vers la restriction de  $f$  sur  $K$ , i.e. :  $\|f_n - f\|_{\infty, K} = \sup_{x \in K} \|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$

Ex :  $f_n : t \mapsto t^n, (f_n) \text{ CVU sur } [a, b] \subset ]-1, 1[$

### 5°) Etude pratique de la CVU d'une suite de fonctions de la variable réelle :

- Ensemble de définition des fonctions  $f_n$
- Etude de la CVS (on fixe  $x$ , on étudie la suite de réels  $f_n(x)$ )
- On a trouvé le domaine  $I$  de convergence simple et on a construit point par point la fonction limite, on se place sur  $I$

- On fixe  $n$  et on pose  $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$

1° cas : si  $g_n$  est bornée,  $U_n = \sup_{x \in I} g_n(x)$

si  $U_n$  tend vers 0, la convergence est uniforme, sinon elle n'est pas uniforme sur  $I$

2° cas : si  $g_n$  n'est pas bornée, la convergence n'est pas uniforme

## II Propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions :

### 1°) Théorème de la continuité :

Th : Si une suite de fonctions  $(f_n)$  définies et continues sur  $I$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$

Dem :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que si  $n > N$ ,  $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

Or  $f_n$  est continue en  $a$  donc si  $\|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\| \leq \|f_n(x) - f_n(a)\| + 2\|f_n - f\|_\infty$$

Intérêt : Si une suite de fonctions continues sur  $I$  converge simplement vers une fonction discontinue sur  $I$ , la convergence ne sera pas uniforme sur  $I$

Ex :  $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$  ne converge pas uniformément sur  $\square$

### 2°) Le théorème de la double limite :

Th : Soient une suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur  $I$  à valeurs dans un espace de dimension finie,  $a$  un point adhérent de  $I$ . Si  $(f_n)$  CVU vers  $f$  sur  $I$ . Si chaque  $f_n$  admet une limite  $b_n$  en  $a$  alors la suite  $(b_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Rem : Dans le cas où  $I = [c, +\infty[$ , ce théorème s'applique en  $+\infty$  qui est adhérent à  $I$

Dem : Pour montrer que la suite  $(b_n)$  converge, on introduit pour tout  $p$  la suite de terme général

$w_n = b_{n+p} - b_n$ , puisque la suite  $(f_n)$  CVU vers  $f$  sur  $I$ , on a  $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que si  $n > N$  alors  $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon$  soit  $\forall x \in I, \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$

Faisons tendre  $x$  vers  $a$  (possible car  $a$  est adhérent)  $\Rightarrow \|b_{n+p} - b_n\| = \|w_n\| < \varepsilon$

Ainsi  $(w_n)$  CV vers 0  $\Rightarrow (b_n)$  CV (résultat admis) vers  $b$

Or  $\|f(x) - b\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - b_n\| + \|b_n - b\| < 3\frac{\varepsilon}{3}$

Ex : Si  $f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = n$  donc pas de CVU sur  $\square^{*+}$

### 3°) Théorème d'intégration sur un segment :

Th : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  telle que  $\forall n, f_n$  soit continue sur  $I$ , la suite  $(f_n)$

converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $I$ . On considère pour  $a \in I, \forall x \in I, F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ .

Alors la suite  $(F_n)$  converge uniformément vers  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  sur tout compact de  $I$

En particulier on aura  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$

Dem : la CVU sur  $[c, d]$  donne  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{d-c}$ , on choisit un compact tel que  $a \in [c, d]$ , or

$$\forall x \in [c, d] \text{ on a } \left| F_n(x) - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f_n(t) - f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \text{ ou } \int_x^a |f_n(t) - f(t)| dt$$

$$\text{Soit } \left| F_n(x) - \int_a^x f(t) dt \right| \leq (d-c) \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \|F_n - F\|_\infty < \varepsilon$$

Exo : Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$

Exo : Déterminer la limite simple de  $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Calculer  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ , a-t-on convergence uniforme sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ?

### 4°) Théorème de dérivabilité :

Th : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  telle que pour tout  $n, f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ , la suite  $(f'_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ . Alors  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $f' = g$

Dem : On définit  $\forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$  et  $h_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$

La suite  $(h_n)$  CVU vers  $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  sur tout compact de  $I$

Soit  $h(x) = \int_a^x g(t) dt$ ,  $h$  est  $C^1$  car  $g$  est continue (limite uniforme de suite de fonctions continues) et

$$h'(x) = g(x). \text{ Or } (f_n) \text{ CV vers } x \mapsto h(x) + f(a) = f(x) \text{ donc } f \text{ est aussi } C^1 \text{ et } f'(x) = g(x)$$

Rem : La CVU de la suite des dérivées est nécessaire comme le prouve cet exemple

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$(f_n) \text{ CVU vers } f, f(x) = |x|$$

$$(f'_n) \text{ CVS mais pas CVU}$$

$$f \text{ n'est pas } C^1$$

5°) Utilisation de la convergence uniforme sur toute partie compacte :

Dans le cas, où il n'y a pas de convergence uniforme sur  $I$  qui est ouvert, mais s'il y a convergence uniforme sur tout compact contenu dans  $I$ , les théorèmes de continuité et de dérivabilité peuvent s'appliquer sur  $K$  compact de  $I$ , ce qui prouve la continuité et la dérivabilité de la limite sur tout  $K$  de  $I$ , donc sur  $I$ , sans qu'il y ait convergence uniforme sur  $I$

6°) Le théorème de la convergence dominée :

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  sur  $\square$

$(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ ,  $f$  est continue par morceaux sur  $I$

$\exists \varphi$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall x, \forall n \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Alors  $f$  et  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  et  $\left(\int_I f_n(t) dt\right)$  converge vers  $\int_I f(t) dt$

Dem : (Hors programme)

$$\forall x, \forall n \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ donc } |f(x)| \leq \varphi(x) \text{ donc } f \text{ est bien intégrable sur } I.$$

Pour démontrer le passage à la limite on utilisera une hypothèse supplémentaire à savoir que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact

Soit  $I = ]a, b[$ , on considère deux suites  $(a_p)$  et  $(b_p)$  d'éléments de  $I$  telles que  $(a_p)$  converge vers  $a$  et  $(b_p)$  converge vers  $b$

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_{a_p}^{b_p} |f_n(t) - f(t)| dt + \int_{b_p}^b |f_n(t) - f(t)| dt + \int_a^{a_p} |f_n(t) - f(t)| dt$$

$$\text{Or } |f_n(t) - f(t)| \leq 2\varphi(t)$$

$$\int_{b_p}^b |f_n(t) - f(t)| dt + \int_a^{a_p} |f_n(t) - f(t)| dt \leq 2 \left[ \int_{b_p}^b \varphi(t) dt + \int_a^{a_p} \varphi(t) dt \right] \leq 2 \left[ \int_a^b \varphi(t) dt - \int_{a_p}^{b_p} \varphi(t) dt \right]$$

$$\varphi \in \ell^1([a, b]) \text{ donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{a_p}^{b_p} \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \text{ tel que si } p > p_0, \int_a^b \varphi(t) dt - \int_{a_p}^{b_p} \varphi(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{A cette étape on choisit } p = p_0 + 1 \text{ ainsi } \int_{b_p}^b |f_n(t) - f(t)| dt + \int_a^{a_p} |f_n(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p \text{ étant fixé, } [a_p, b_p] \text{ est une partie compacte } |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a_p, b_p]} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \exists N \text{ tel que si } n > N, \|f_n - f\|_{\infty, [a_p, b_p]} < \frac{\varepsilon}{2(b_p - a_p)}$$

$$\text{D'où } \int_{a_p}^{b_p} |f_n(t) - f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et finalement } \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

$$\text{Exemple : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2} dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = 0$$

$$\text{Exo : Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt, \text{ en déduire la valeur de } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exo : Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt$  où  $a < b$

### III Approximation de fonctions :

1°) Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux :

Def : On appelle subdivision de  $[a, b]$  de  $\square$ , toute suite finie et croissante de points de  $[a, b]$  telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Def : On appelle fonction en escalier sur  $[a, b]$ , toute fonction définie sur  $[a, b]$  pour laquelle il existe une subdivision de  $[a, b]$ , telle que la restriction de  $f$  à chaque  $]x_i, x_{i+1}[$  soit une fonction constante

Th : Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie  $F$  est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier

Dem : Dans un premier cas, on suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , d'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon = \frac{1}{n}, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, x') \text{ si } |x - x'| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \frac{1}{n}$$

Posons  $p = E\left(\frac{b-a}{\eta}\right)$  et partageons  $[a, b]$  en  $p+1$  intervalles d'amplitude égale

On construit  $a_k = a + k \frac{b-a}{p+1}$ , et la fonction en escaliers  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow F$  définie par

$$\varphi_n(x) = f(a_k) \text{ si } x \in [a_k, a_{k+1}[ \text{ et } \varphi_n(b) = f(b) \text{ ainsi}$$

$$\forall x \in [a, b], \exists k \text{ tel que } x \in [a_k, a_{k+1}[ : |x - a_k| < \eta \Rightarrow \|f(x) - \varphi_n(x)\| = \|f(x) - f(a_k)\| < \frac{1}{n}$$

$$\text{Finalement } \|f - \varphi_n\|_{\infty} < \frac{1}{n}$$

Si  $f$  est continue par morceaux, la restriction de  $f$  à  $]x_i, x_{i+1}[$  se prolonge par continuité sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , d'après l'étude du cas précédent,  $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$  est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers

$$(\varphi_{i,n}) \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]$$

On construit alors  $\varphi_n(x) = \varphi_{i,n}(x)$ ,  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

Exo : Le lemme de Lebesgue

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$$

2°) Applications (informatique pour tous) : le calcul approché d'intégrales

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut approcher  $f$  uniformément par  $(g_n)$  suite de fonctions en

$$\text{escalier, ainsi } \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dt$$

Le calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

Th : Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , on pose  $R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$

Alors  $\left| R_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty$

Dem :  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$

A l'aide d'une IPP on a  $\int_\alpha^\beta (x-\alpha) f'(x) dx = (\beta-\alpha) f(\beta) - \int_\alpha^\beta f(x) dx$

Donc  $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f(a_k) - \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_{k-1}) f'(x) dx$

$$\begin{aligned} \left| R_n - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \frac{b-a}{n} f(a_k) - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_{k-1}) f'(x) dx \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_{k-1}) |f'(x)| dx \right) \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{(a_k - a_{k-1})^2}{2} \right) \|f'\|_\infty = \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

Le calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Th : Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ , on pose  $T_n = \frac{b-a}{2n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + f(a_{k+1}) \right)$

En fait on a :  $T_n = \frac{b-a}{2n} \left( \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)$

Alors  $\left| T_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$

Dem :  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$

A l'aide d'une IPP on a  $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) f''(x) dx = (\alpha-\beta)(f(\beta) + f(\alpha)) + 2 \int_\alpha^\beta f(x) dx$

Donc  $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{2n} (f(a_k) + f(a_{k+1})) = \frac{1}{2} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1}) f''(x) dx$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - T_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - \frac{1}{2} (a_{k+1} - a_k) (f(a_k) + f(a_{k+1})) \right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_{k+1})(x-a_k) f''(x) dx \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} (a_{k+1} - x)(x - a_k) |f''(x)| dx \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{(a_k - a_{k-1})^3}{6} \right) \|f''\|_\infty = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty \end{aligned}$$

Exemple : Le calcul de  $\ln 7$  à  $10^{-2}$  près par les rectangles a besoin de  $n=1800$  et de  $n=60$  par la méthode des trapèzes

### 3°) Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions polynômes :

Def : On appelle polynômes de Bernstein ( 1880-1968 ) associés à une fonction  $f$  continue sur  $[0,1]$ , les

polynômes suivants :  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Prop : Pour les fonctions  $f_i : x \mapsto x^i, i=0,1,2$  on a  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = 1, \sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = x$

$$\text{et } \sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n}\right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}$$

$$\text{Dem : } \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = (x + (1-x))^n = 1$$

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $(n, x)$

$$\sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = \frac{1}{n} E(X) = x$$

$$\sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n}\right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = \frac{1}{n^2} E(X^2) = \frac{1}{n^2} (V(X) + (E(X))^2) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}$$

*Th de Stone-Weierstrass ( 1903-1989 ; 1815-1897 ) : Toute fonction continue sur  $[a, b]$  à valeurs complexes est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur  $[a, b]$*

$$\text{Dem : On pose } B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p} . \text{ On a } \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} = 1$$

$$\text{donc } B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left( f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right) x^p (1-x)^{n-p}$$

Or  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  donc uniformément continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left| \frac{p}{n} - x \right| < \eta \Rightarrow \left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| B_n(f)(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \sum_{\left| \frac{p}{n} - x \right| \geq \eta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

$$\left| B_n(f)(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \frac{\|f\|_{\infty}}{\eta^2} \sum_{p=0}^n \left( \frac{p}{n} - x \right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \quad \text{car } \frac{\left( \frac{p}{n} - x \right)^2}{\eta^2} \geq 1$$

$$S = \sum_{p=0}^n \left( \frac{p}{n} - x \right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

$$S = \sum_{p=0}^n \left( \frac{p}{n} \right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} - 2x \sum_{p=0}^n \left( \frac{p}{n} \right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} + x^2 \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

$$\text{Donc } S = \frac{(n-1)x^2 + x - 2nx^2 + nx^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n} \quad \text{donc } \sup_{x \in [0, 1]} S = \frac{1}{4n}$$

$$\text{En conclusion on obtient } \|B_n(f) - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}}{2n\eta^2} < \varepsilon$$

*Exo : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que pour tout entier naturel  $n$  on ait*

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0. \text{ Montrer que } f \text{ est nulle sur } [0, 1].$$

#### **IV) Les séries de fonctions :**

##### **1°) Convergence simple et convergence uniforme**

*Def : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$  dans un espace de dimension finie, on dit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  si pour tout  $x$  de  $I$  la série de réels  $\sum f_n(x)$  est convergente ; on note alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ , la fonction  $S$  est appelée la somme de la série, l'ensemble de définition de  $S$  correspond à l'ensemble de convergence simple de la série  $\sum f_n$*

*Exemple : La fonction définie par  $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$  sur  $]0, +\infty[$*

*Def : On dit que la série de fonctions converge uniformément vers  $S$  sur  $I$  si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{x \in I} \left\| S(x) - \sum_{p=0}^n f_p(x) \right\| \right] = 0$$

*( c'est-à-dire que la suite  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$  )*

*Prop : La convergence uniforme entraîne la convergence simple*

*Rem : L'étude de la CVU nécessite dans le cas général la connaissance de la somme, pourtant le cas des séries alternées est souvent très utile car on possède une majoration du reste*

*Exo : Etude de la CVS et de la CVU de la série de fonctions définies par  $f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}$*

*Etude de la CVU de la série de fonctions définies par  $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$*

### 2°) La convergence normale :

*Def : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions bornées sur  $I$  à valeurs réelles la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si la série de réels  $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$  où  $\|f_n\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$  est convergente*

*Exo : Etude de la série de fonctions  $\sum f_n$  définie par  $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{x^2 + n^2}$*

*Th : Si une série de fonctions est normalement convergente sur  $I$ , alors elle y est uniformément :  $CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$*

*Dem :  $\forall x \in D, |u_n(x)| \leq \|u_n\|_{\infty}$  ce qui assure la CVA donc la CV de la série  $\sum u_n$*

*Soit  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$*

*$|R_n(x)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|u_p\|_{\infty} \rightarrow 0$  comme reste d'une série convergente, ce qui assure maintenant la CVU*

*Contre-exemple : La série de fonctions  $\sum \frac{(-1)^n x}{n}$  ne converge pas normalement sur  $[0,1]$  mais converge uniformément sur  $[0,1]$*

*Th : S'il existe une suite de réels positifs  $(\alpha_n)$  telle que  $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \alpha_n$  et  $\sum \alpha_n$  soit convergente alors la série de fonctions est normalement convergente sur  $I$*

### 3°) Propriétés de la somme d'une série de fonctions :

*Th de continuité : Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément sur  $I$  alors la somme est continue sur  $I$*

*Dem : On pose  $\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x)$*

$S_n$  est continue sur  $I$  et  $(S_n)$  CVU vers  $S$  sur  $I$  donc  $S$  est continue sur  $I$

Th de la double limite : Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément sur  $I$   
 $a$  est adhérent à  $I$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$ . Alors  $\sum b_n$  CV et  $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Dem : On pose  $\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x), \lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = \sum_{p=0}^n b_p$

$(S_n)$  CVU vers  $S$  sur  $I$  donc on applique le théorème de la double limite à la suite  $(S_n)$

Exemple : La série  $\frac{1}{n^x}$  ne converge pas uniformément sur  $]1, +\infty[$ , car si c'était le cas, comme  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{n} DV$  (l'étude de cet exemple peut se prolonger, la somme de cette série étant la fonction zêta)

Th d'intégrabilité sur un segment : Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément sur  $I$  alors pour tout  $a \in I, x \in I$  la série  $\sum \int_a^x f_n(t) dt$  converge uniformément vers

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt. \text{ On a alors } \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

Dem : On applique le théorème d'intégration de la limite uniforme d'une suite de fonctions en posant  $\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x)$

Exemple :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

Th de dérivabilité : Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$  telle que il existe  $a$  élément de  $I$  tel que  $\sum f_n(a)$  converge et si la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$

Alors la somme est de classe  $C^1$  sur  $I$ . De plus on a  $\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$

Dem : On applique le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonction en posant

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x) \text{ et } S'_n(x) = \sum_{p=0}^n f'_p(x)$$

$(S_n)$  CVS vers  $S$  sur  $I$  et  $(S'_n)$  CVU vers  $T$  sur  $I$

Le cas usuel d'utilisation de ce théorème est lorsque la série de fonctions converge simplement sur  $I$

Remarque importante :

Comme pour les suites de fonctions, si une série ne converge pas uniformément sur  $I$ , mais converge uniformément sur tout compact  $K$  de  $I$ , on utilise les théorèmes de continuité et de dérivabilité sur  $K$ , pour montrer ainsi que la somme est continue ou dérivable sur tout compact de  $I$ , ce qui prouve la continuité et la dérivabilité sur  $I$ .

4°) Un bel exercice :

Rappel :  $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

On considère la série de fonctions de terme général  $u_n$

$$u_n \text{ étant définie de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ par } u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} e^{-(n+2)x}}{(n+1)(n+2)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

On notera alors  $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

Montrer que  $U$  est définie sur  $[0, +\infty[$ , préciser  $U(0)$

Montrer que  $U$  est continue, puis de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ . Préciser  $U'(0)$

Montrer que  $U$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ . Calculer  $U''(x) + U'(x)$

En déduire l'expression de  $U(x)$

5°) Les théorèmes de sommation dans  $L^1$  (ou ITT) :

Th1 (cas positif) : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  sur  $\mathbb{R}$ , intégrables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ ,  $S$  est continue par morceaux sur  $I$ . Alors  $S$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\sum \int_I f_n(t) dt$  converge et  $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt$

Exemple : Montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^n (1 - \sqrt{x}) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$

Th2 (cas général) : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  sur  $\mathbb{R}$ , intégrables sur  $I$  telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement vers  $S$  sur  $I$ ,  $S$  est continue par morceaux sur  $I$

Si la série  $\sum N_1(f_n) = \sum \int_I |f_n(t)| dt$  est convergente

Alors  $S$  est intégrable sur  $I$ ,  $\int_I |S(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |f_n(t)| dt$  et  $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt$

Dem : On admettra l'hypothèse supplémentaire que  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $I$ . On pose  $I = ]a, b[$  et  $x \in I$

Montrons que  $S$  est intégrable sur  $I$ . Soit  $S_n(t) = \sum_{p=0}^n f_p(t)$  et  $J = [a, x]$

$$\int_J |S_n(t)| dt \leq \sum_{p=0}^n \int_J |f_p(t)| dt \leq \sum_{p=0}^n \int_I |f_p(t)| dt \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \int_I |f_p(t)| dt$$

D'après l'hypothèse supplémentaire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J |S_n(t)| dt = \int_J |S(t)| dt$

Finalement  $\forall x \in I, \int_a^x |S(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$  ce qui prouve que  $S$  est intégrable sur  $I$

Et on a bien  $\int_I |S(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$

Il reste maintenant à prouver l'égalité

$|\int_I S(t) dt - \int_I S_n(t) dt| \leq \int_I |R_n(t)| dt$  or  $R_n$  est la somme de la série  $\sum_{p \geq n+1} f_p$ , on peut lui appliquer l'inégalité précédente  $\int_I |R_n(t)| dt \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} N_1(f_p)$  qui est le reste d'une série convergente donc qui tend vers 0

Exemple pédagogique : Appliquer ce théorème avec la suite  $f_n(t) = (-t^2)^n \ln t$  sur  $]0, 1]$

Exo : Montrer que  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Exo : Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

VI) Applications : étude de fonctions définies par une intégrale :

On considère  $f: A \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \mapsto f(x, t)$  où  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $I$  intervalle

On définit sur  $A$  :  $g(x) = \int_I f(x, t) dt$

1°) Théorème de continuité sous le signe d'intégrale ( dit de Leibniz ) :

$x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ,  $\forall t \in I$

$t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,  $\forall x \in A$

$\exists \varphi$  positive et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall (x, t) \in A \times I$ ,  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination)

alors  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $A$

Dem : Soit  $K$  une partie compacte de  $A$  et  $x$  un élément de  $K$  qui est fermée

$\exists (x_n) \in K^\square$  telle que  $x_n \rightarrow x$ , on note alors  $f_n(t) = f(x_n, t)$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ , intégrable sur  $I$  et  $(f_n)$  CVS vers  $t \mapsto f(x, t)$  qui est continue par morceaux sur  $I$ , de plus pour tout  $t$  de  $I$  et tout  $n$  de  $\square$  on a  $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$  où  $\varphi$  est intégrable sur  $I$ , on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt = g(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} g(x_n)$ , on recommence le raisonnement pour toutes les suites qui convergent vers  $x$ , ce qui prouve bien la continuité de  $g$  en  $x$  donc sur  $K$  et sur  $A$

Exo : Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$

Exo : Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}^{*+}$  de  $f(x) = \int_0^\infty \cos(t) e^{-xt} dt$ , préciser ensuite son expression

2°) Extension du théorème de convergence dominée

Th : Soit  $A = [a, b]$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,  $\forall x \in A$

On a  $\lim_{x \rightarrow b} f(x, t) = g(t)$  où  $g$  est continue par morceaux sur  $I$

$\exists \varphi$  positive et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall (x, t) \in A \times I$ ,  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination)

alors  $\lim_{x \rightarrow b} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt$

Dem : On utilise le TCD avec  $\forall (x_n) CV$  vers  $b$ ,  $f_n(t) = f(x_n, t)$

Exo : Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

3°) Théorème de dérivabilité sous le signe d'intégrale :

$x \mapsto f(x, t)$  est  $C^1$  sur  $A$ ,  $\forall t \in I$

$t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  sont continues par morceaux sur  $I$ ,  $\forall x \in A$

$\exists h$  positive et intégrable sur  $I$  telle que  $\forall (x, t) \in A \times I$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq h(t)$  (2° hypothèse de domination)

alors  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $A$  et  $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Dem : Soit  $K$  une partie compacte de  $A$  et  $x$  un élément de  $K$  qui est fermée

$\exists (x_n) \in K^\square$  telle que  $x_n \rightarrow x$ , on note alors  $u_n(t) = \frac{f(x_n, t) - f(x, t)}{x_n - x}$ ,  $u_n$  est continue sur  $I$ ,

intégrable sur  $I$  et  $(u_n)$  CVS vers  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  qui est continue sur  $I$ .

On peut appliquer le théorème des accroissements finis à  $f$  sur  $[x_n, x]$ , il existe donc  $\exists y_n \in [x_n, x]$

tel que  $f(x_n, t) - f(x, t) = (x_n - x) \frac{\partial f}{\partial x}(y_n, t) \Rightarrow |u_n(t)| \leq h(t)$  où  $h$  est intégrable sur  $I$ .

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée ainsi on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I u_n(t) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = g'(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x}$$

On recommence le raisonnement pour toute les suites qui convergent vers  $x$ , ce qui prouve bien que  $g$  est continûment dérivable en  $x$  donc sur  $K$  et sur  $A$

#### 4°) Application au calcul d'intégrales :

Exo : Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ , montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Puis exprimer  $F(x)$

Exo : Pour  $x \geq 0$ ,  $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ . Montrer que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$

Montrer pour  $x > 0$ ,  $G(x) - G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

En déduire que  $G(x)$  tend vers 0 à l'infini et la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exo : Calculer  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{th} 3x - \text{th} 2x}{x} dx$

#### 5°) Etude d'un exemple : la fonction Gamma de Euler :

On définit la fonction gamma pour toute valeur de  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

Dem : On considère  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  sur  $]0, +\infty[$ , cette fonction est continue sur  $]0, +\infty[$

$e^{-t} t^{x-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$  est donc intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$

$t^2 e^{-t} t^{x-1} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$  donc  $e^{-t} t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , la fonction est donc toujours intégrable sur  $[1, +\infty[$

En conclusion  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[ \Leftrightarrow x > 0$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

Dem : Soient  $\varepsilon > 0$  et  $X > 0$ , effectuons une intégration par parties pour le calcul de  $\Gamma(x+1)$

$$\int_{\varepsilon}^X e^{-t} t^x dt = \left[ -e^{-t} t^x \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X x t^{x-1} e^{-t} dt \text{ or } e^{-\varepsilon} \varepsilon^x \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } e^{-X} X^x \xrightarrow{X \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Donc } \Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N} \text{ en itérant la formule } \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\Gamma(1) \text{ or } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty$  car  $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

Dem : On pose  $\gamma : (x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$

$\forall t \in ]0, +\infty[, x \mapsto \gamma(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$

$\forall x \in ]0, +\infty[, t \mapsto \gamma(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$

Pour tout  $K = [a, b] \subset ]0, +\infty[$  et  $\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[$

Nous avons  $a \leq x \leq b \Rightarrow a-1 \leq x-1 \leq b-1$  or  $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$ , il faut donc discuter selon le signe de  $\ln t$

Si  $t \in ]0, 1]$ ,  $\ln t \leq 0$  donc  $a \leq x \leq b \Rightarrow (a-1)\ln t \geq (x-1)\ln t \Rightarrow t^{x-1} \leq t^{a-1}$

Si  $t \in [1, +\infty[$ ,  $\ln t \geq 0$  donc  $a \leq x \leq b \Rightarrow (x-1)\ln t \leq (b-1)\ln t \Rightarrow t^{x-1} \leq t^{b-1}$

On définit  $\varphi(t) = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ , si  $t \in ]0, 1]$ ,  $\varphi(t) = t^{a-1}$  et si  $t \in [1, +\infty[$ ,  $\varphi(t) = t^{b-1}$

$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[, |\gamma(x, t)| \leq e^{-t} \varphi(t) = \alpha(t)$ ,  $\alpha$  est continue sur  $]0, +\infty[$

$\alpha(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$  est donc intégrable sur  $]0, 1]$  car  $1-a < 1$

$t^2 e^{-t} t^{x-1} \xrightarrow{+\infty} 0$  donc  $e^{-t} t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , la fonction est donc toujours intégrable sur  $[1, +\infty[$

Donc  $\alpha$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . D'après le théorème de continuité sous le signe d'intégrale,  $\Gamma$  est continue sur toute partie compacte de  $]0, +\infty[$ .

La fonction  $\Gamma$  est continue en 1 donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$  or  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

Finalement  $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty$

$$e^{-t} t^{x-1} \geq 0 \Rightarrow \Gamma(x) \geq \int_2^3 e^{-t} t^{x-1} dt \geq e^{-3} \int_2^3 t^{x-1} dt \geq e^{-3} \frac{3^x - 2^x}{x} \text{ or } \frac{3^x - 2^x}{x} = \frac{3^x}{x} \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x \right] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

Finalement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$

Elle est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et  $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$

Dem : On pose  $\gamma : (x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$

$\forall t \in ]0, +\infty[, x \mapsto \gamma(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$

$\forall x \in ]0, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$

Pour tout  $K = [a, b] \subset ]0, +\infty[$  et  $\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[, \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} \varphi(t) |\ln t| = \psi_1(t)$

$\psi_1(t) \sim t^{a-1} |\ln t| = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$  car  $t^{1-\frac{a}{2}} t^{a-1} |\ln t| = t^{\frac{a}{2}} |\ln t| \rightarrow 0$ , or  $1 - \frac{a}{2} < 1$  donc  $\psi_1$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et  $t^2 \psi_1(t) \xrightarrow{+\infty} 0$  donc  $\psi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , la fonction est donc toujours intégrable sur  $[1, +\infty[$

Comme  $\psi_1$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur toute partie compacte de  $]0, +\infty[$ .

On généralise à la classe  $C^p$  pour tout  $p$

Pour cela on va dominer pour tout  $K = [a, b] \subset ]0, +\infty[$  et  $\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[$

$\left| \frac{\partial^p \gamma}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq e^{-t} \varphi(t) |\ln t|^p = \psi_p(t)$  or  $\psi_p$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  ( la démonstration est la même que pour  $\psi_1$  ) d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $\Gamma$  est de classe  $C^p$  sur toute partie compacte de  $]0, +\infty[$ .

En particulier elle est convexe sur  $\mathbb{R}^{*+}$  car  $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^2 dt \geq 0$

De plus il existe  $c \in ]1, 2[$ , tel que  $\Gamma'(c) = 0$ , ainsi  $\Gamma$  est croissante sur  $[c, +\infty[$  et décroissante sur  $]0, c]$ .

Dem :  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $\Gamma'(c) = 0$ , or  $\Gamma'$  est croissante

Exo : Montrer que pour tout  $x > 1$ ,  $\xi(x) \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du$

Exo : Montrer que  $\ln \circ \Gamma$  est convexe sur  $]0, +\infty[$