Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap A4 : Exercices vus en classe ou à faire

I) II) III) Suites de fonctions

Exo1 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\dfrac{1+n^2x^2}{1+n^3x^2}$

Exo2 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$

Exo3 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=1-\dfrac{1}{1+nx^2}$

Exo4 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\dfrac{n}{1+n^3x^2}$

Exo5 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$

Exo6 :
Soit $f_n(x)=\dfrac{x^n+1}{x^2+1}$*, déterminer l'ensemble D maximal sur lequel la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers une fonction f , sur quel domaine f est-elle continue ?*

Exo7 :
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$

Exo8 :
Déterminer les domaines de convergence simple et de convergence uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\dfrac{n\left(x^3+x\right)e^{-x}}{1+nx}$

Exo9 :
Soit $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$*. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions*
Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *, que peut-on déduire pour la convergence uniforme ?*

Exo10 :
On définit une suite (P_n) *de polynômes par* $\begin{cases} P_{n+1}=P_n+\dfrac{1}{2}\left(x-P_n^{\,2}\right) & \textit{pour tout } n\in\mathbb{N} \\ P_0=1 \end{cases}$
Montrer que la suite (P_n) *est simplement convergente sur* $[0,1]$ *vers une fonction f que l'on précisera*

Préciser la monotonie des fonctions $x \mapsto P_n(x)$

Montrer que $\forall n \geq 0,\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq P_n(x) - f(x) \leq P_n(0)$, *en déduire la convergence uniforme de* (P_n) .

<u>Exo11 :</u>

Etudier la convergence uniforme de $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ *sur* $\mathbb{R}^+$

<u>Exo12 :</u>

Etudier la convergence uniforme de $f_n(x) = nxe^{-nx}\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}^+$

<u>Exo13 :</u>

Soit f une application continue sur $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout n on ait* $\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, *montrer que f est la fonction nulle.*

<u>Exo14 :</u>

Calculer le polynôme de Bernstein associé à la fonction $f(x) = x^3$ *sur* $[0,1]$

<u>Exo15 :</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue*

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_n(x) = \dfrac{3n}{4}\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)\left(1-n^2t^2\right)\mathrm{d}t$

Montrer que (f_n) *converge uniformément vers f sur* $[a,b] \subset \mathbb{R}$

<u>Exo16 :</u>

Soit $f_n(x) = \inf\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right)$, *étudier la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$

<u>Exo17 :</u>

Pour tout x réel positif et tout n entier naturel non nul, on note $f_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$, $f_n(0) = 0$

Etudier les convergences simple et uniforme de la suite (f_n)

<u>Exo18 :</u>

Soit la suite (f_n) *de fonctions définies par* $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$

Etudier la convergence uniforme de (f_n) *sur* $\mathbb{R}$

<u>Exo19 :</u>

Etudier la CVU de (f_n) *telle que* $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$

<u>Exo20 :</u>

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continue par morceaux sur* $[a,b]$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = 0$

<u>Exo21 :</u>

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin x}{n+x}\mathrm{d}x$

<u>Exo22 :</u>

Déterminer la limite simple de $f_n(x) = n\sin x\cos^n x$ *sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, *a-t-on convergence uniforme sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *?*

<u>Exo23 :</u>

Etudier la limite simple de $f_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$ *sur* $\mathbb{R}$, *a-t-on convergence uniforme ?*

<u>Exo24 :</u>

Etudier la limite simple de $f_n(x) = ne^{-nx}\sin x$ *sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, *a t'on convergence uniforme ?*

<u>Exo25 :</u>

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n(t) = n\left(f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right)$

Montrer que la suite de fonctions (u_n) *converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$ *vers une fonction que l'on précisera*

<u>Exo26 :</u>

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = n^{\alpha}x(1-x)^n$

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n)

Discuter suivant les valeurs de α *de la convergence uniforme*

<u>Exo27 :</u>

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$

<u>Exo28 :</u>

Soit $f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}$, *pour* $n\in\mathbb{N}$ *et* $x\in[0,1]$

Etudier la converge simple de (f_n) *sur* $[0,1]$

Etudier la converge uniforme de (f_n) *sur* $[0,1]$

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$

<u>Exo29 :</u>

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$

<u>Exo30 :</u>

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$

<u>Exo31 :</u>

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

<u>Exo32 :</u>

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exo33 :

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée. Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$

Exo34 :

Donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini de $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x(1+nx^2)}\mathrm{d}x$

Exo35 :

Montrer que $\int_1^{+\infty}e^{-t^n}\mathrm{d}t\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$

Exo36 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^ne^{-t}}$

Exo37 :

Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ *où* $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$

Exo38 :

Soit $F(x)=\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ *, déterminer* $\lim\limits_{x\to0}F(x)$

IV) Séries de fonctions

Exo39 :

On considère $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$*, montrer que la série de terme général* f_n *converge simplement puis uniformément sur* $\mathbb{R}$.
A-t-on le même résultat pour la série de fonctions de terme $g_n(x)=nf_n(x)$ *?*

Exo40 :

On considère $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^2+1}$*, montrer que la série de terme général* f_n *converge simplement puis uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exo41 :

On considère $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{2^n}$*, déterminer le domaine D de convergence simple de la série de terme général* f_n.
A-t-on convergence normale sur D ? a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ *?*
Etudier la convergence uniforme sur $\left]-\infty;\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

Exo42 :

On considère $f_n(x)=2^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$*, montrer que la série de terme général* f_n *converge simplement sur* $\mathbb{R}$. *A-t-on convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*
Etudier la convergence uniforme sur $[-a,a]$ *avec* $0<a<\pi$

Exo43 :

On considère $f_n(x)=\frac{1}{2^n}\sqrt{1-x^{2n}}$ *, montrer que la série de terme général* f_n *converge uniformément sur* $[-1,1]$.

Exo44 :

Déterminer le domaine de convergence uniforme de la série de terme général f_n *telle que* $f_n(x)=\dfrac{n}{n+x^n}$

Exo45 :

On considère $u_n(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, *la fonction S est définie par* $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

Déterminer l'ensemble de définition de S, préciser $S(0)$ *et* $S(1)$.

Montrer que $S(x+1)-S(x)=\ln(x+1)$

Soit $T(x)=\exp(S(x))$ *, montrer que* $T(x+1)=(x+1)T(x)$, *en déduire* $T(n)$

Exo46 :

On considère la série de fonctions f_n *définies sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f_n(x)=nx^2e^{-x\sqrt{n}}$

Etudier la convergence simple puis normale de cette série de fonctions

Exo47 :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ *on pose* $f_n(x)=\mathrm{th}(x+n)-\mathrm{th}(n)$

Etablir la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$

On pose alors $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$, *montrer que S est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$

Exo48 :

Rappel : $\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On considère la série de fonctions de terme général u_n *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}e^{-(n+2)x}}{(n+1)(n+2)}$ $(n\in\mathbb{N})$

On notera alors $U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$

Montrer que U est définie sur $[0,+\infty[$ *, préciser* $U(0)$

Montrer que U est continue puis de classe C^1 *sur* $[0,+\infty[$ *. Préciser* $U'(0)$

Montrer que U est de classe C^2 *sur* $]0,+\infty[$ *. Calculer* $U''(x)+U'(x)$

En déduire l'expression de $U'(x)$

Pour trouver l'expression de U, on déterminera une primitive de $x\mapsto e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ *en posant* $t=1+e^{-x}$

Exo49 :

Pour tout t réel et tout n entier naturel non nul, on considère $f_n(t)=\dfrac{1}{n^4+t^4}$

On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Montrer que f est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et étudier les variations de f*

Montrer que f admet en $+\infty$ *une limite que l'on déterminera*

Exo50:

Déterminer un équivalent en 1 *par valeurs supérieures de la fonction* $\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$

Exo51 :

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$

Préciser l'ensemble de définition de f

Déterminer un équivalent de $f(x)$ *lorsque* $x \to 0$, $x > 0$

Exo52:

On pose pour $n \geq 1$, $u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ *définie sur* $[0,1]$, *puis* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

Montrer que S est dérivable sur $[0,1]$

Déterminer $S'(1)$

Exo53:

On pose pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$ *définie sur* $\mathbb{R}$, *puis* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exo54:

On pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{1-x^n}$ *où* $|a| < 1$

Montrer que S est continue sur $[0,1[$

Déterminer un équivalent de $S(x)$ *lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures*

Exo55:

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ *et* f_0 *une fonction continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$

$\forall x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. *Etudier la nature de la série* $\sum f_n$

Exo56:

Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$

Exo57:

Soit une suite de réels (a_n) *telle que* $\sum {a_n}^2$ *converge. On pose* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}\sin(nx)$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exo58:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{13+12\cos x}$

Exprimer f comme une fonction rationnelle en e^{ix}

Déterminer les coefficients (α_n) *tels que* $f(x) = \alpha_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

En déduire pour tout entier k, la valeur de $I_k = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos kt}{13+12\cos t}\,\mathrm{d}t$

Exo59:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{4\cos x - 5}$

Exprimer f comme une fonction rationnelle en e^{ix}

Déterminer les coefficients (α_n) *tels que* $f(x) = \alpha_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

En déduire pour tout entier k, $I_k = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos kt}{4\cos t - 5}\,\mathrm{d}t$

Exo60:

Calculer $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n}$ *et en déduire la valeur de* $\int_0^{\pi}\frac{2\cos x-1}{5-4\cos x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

Exo61:

Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n2^n}$ *et calculer sa somme*

Exo62:

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x)=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$

On note f la somme de cette série lorsqu'elle existe

Montrer que l'ensemble de définition de f est $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Pour x non nul dans D que vaut $f\left(\frac{1}{x}\right)$ *?*

Montrer que f est continue sur $\left]-1,1\right[$ *puis sur D*

Montrer que f est C^1 *sur D*

Exo63:

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}$

Exo64:

Soit $n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=(-1)^n\sin\left(\sin\left(....(\sin x)....\right)\right)$*, (n composées)*

Montrer que $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$

Exo65:

Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2}{n(x^2+1)}\right)$

Exo66:

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\sim\ln 2$ *quand* $x\to 0^+$

Exo67:

Soit la fonction $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+(-1)^n n}$

Déterminer l'ensemble de définition de f, montrer que f est continue sur cet ensemble

Exo68:

Soit pour $x\in\mathbb{R}^{*+},\ n\in\mathbb{N},\ u_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n!)(n+x)}$*, montrer que la série de fonction de terme général* u_n *converge simplement sur* $\mathbb{R}^{*+}$*, on note* U *sa fonction somme*

Montrer $\forall x\in\mathbb{R}^{*+},\ xU(x)-U(x+1)=\frac{1}{e}$

Exo69:

Calculer $\sum_{p=-n}^{n}e^{2ipt}$*. Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}e^{-t}\mathrm{d}t=1+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{1+4p^2}$

Exo70 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\mathrm{sh}(\sin x)\cos(\cos x)$

Déterminer une suite de réels (a_n) *telle que pour tout x on ait* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sin(nx)$

Exo71:

On pose pour $n \geq 1, \quad f_n(x) = x^n\left(1-\sqrt{x}\right)$ *définie sur* $[0,1]$

A t-on convergence normale de $\sum f_n$ *sur* $[0,1]$ *?*

Exo72 :

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

Exo73 : (avec A5)

Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$

Exo74 :

Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

Exo75 :

Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2x}}{1-e^{-3x}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2+3n)^2}$

Exo76 :

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

Exo77 :

On considère la fonction définie par $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *, la somme d'une série entière de rayon R > 0.*

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ *. On notera* φ *sa somme*

Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-R,R[$ *,* $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(tx)\mathrm{d}t$

Exo78 :

Montrer que $\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(1+3n)(2+3n)}$ *,* $\forall x \in [-1,1]$

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+3n)(2+3n)}$

Exo79 :

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ *,* $\int_0^1 t^{xt^y}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(1+ny)^{n+1}}$

Exo80 :

On suppose que $\sum a_n$ *est une série de réels absolument convergente*

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n\frac{x^n}{n!}$ *converge simplement vers une fonction f continue sur* $\mathbb{R}$ *.*

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ *et exprimer* $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\mathrm{d}x$ *en fonction de la somme d'une série numérique.*

Exo81 :

Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exo82 :

Soit la suite (f_n) *de fonctions définies* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ *par* $f_n(x)=x^n\left(1-\sqrt{x}\right)$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)}$

V) Fonctions définies par une intégrale :

Exo83 :

Soit $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(t^2+x^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$ *.*

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Exprimer explicitement $F'(x)$*, en déduire* $F(x)$

Exo84 :

Soit $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ *, exprimer* $F'(x)$

Exo85 :

Soit $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$*, exprimer* $F(x)$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$*, exprimer* $F'(x)$

Exo86 :

Soit $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}\cos(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$*, exprimer* $F(x)$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$*, exprimer* $F'(x)$

Exo87 :

Pour $x\geq 0$*,* $\displaystyle G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}^+$ *et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^{+*}$

Montrer pour $x>0$*,* $\displaystyle G(x)-G'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

En déduire que $G(x)$ *tend vers 0 à l'infini et la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exo88 :

Soit $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ *pour* $x>0$ *, montrer que F est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et que* $\displaystyle F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$

Exo89 :

Montrer que $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ *quand* $x \to 0^+$. *Montrer que* $\ln(\Gamma)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}^{+*}$

Préciser la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Montrer qu'il existe $c \in \left]0,1\right[$, *tel que* $\Gamma'(c) = 0$. *En déduire que* Γ *est croissante sur* $\left[2,+\infty\right[$

Exo90 :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ *et* $g(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

Montrer que f et g sont C^1 *sur* $\mathbb{R}^+$

Montrer que l'application $\varphi = g + f^2$ *est constante, préciser cette constante*

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. *En déduire la valeur de* $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$

Exo91 :

Calculer $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{th}3x - \mathrm{th}2x}{x}\mathrm{d}x$

Exo92 :

Soit $F(t) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$. *Montrer que F est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$

En déduire l'expression de F

Puis calculer $I = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\arctan(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$

Exo93 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{ch}(2tx)\mathrm{d}t$

Montrer que f est C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *En déduire l'expression de f*

Exo94 :

Déterminer $\lim\limits_{a\to0} \dfrac{1}{a}\int_0^\pi \sin(a\sin x)\mathrm{d}x$

Exo95 :

Soit $G(x) = \int_0^1 t^{-x}\ln(t)\mathrm{d}t$

Déterminer l'ensemble D sur lequel G est définie. Montrer que G est continue sur D

Calculer $G(x)$ *pour x de D*

Exo96 :

Soit la fonction $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{(i-u^2)t^2}}{u^2 - i}\mathrm{d}u$

Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$ *et préciser* $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$

Montrer que F est C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et déterminer* $F'(t)$

(On utilisera le résultat $2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ *)*

En déduire la valeur de $F(0)$ *et des intégrales* $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

<u>Exo97 :</u>

On suppose que f est une fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$

Pour $x\in[a,b]$ *et* $y\in[c,d]$*, on considère la fonction* $g(x,y)=\int_c^y f(x,u)\,\mathrm{d}u$

Montrer que $y\mapsto g(x,y)$ *est* C^1 *sur* $[c,d]$

On pose alors $G(y)=\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x$

Montrer que G est C^1 *sur* $[c,d]$

En déduire que $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

<u>Exo98 :</u>

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$

Déterminer l'expression de f

<u>Exo99 :</u>

$\forall x>-1$*, étudier la fonction* $f : x\to\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

<u>Exo100 :</u>

Soit la fonction : $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+t^2x^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

Exprimer explicitement F'(x), en déduire F(x)