Saint Rémi : MP (programme 2022)
David Corneillie

Chap A5 : Les séries entières

<u>1° exemple :</u>

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n}\quad pour\quad x\in\mathbb{R},\ \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\to|x|$$

$$donc\ \ |x|<1\Rightarrow\sum u_n(x)\ CV$$

$$|x|>1\Rightarrow pas\ de\ CVA,\ mais\ |u_n(x)|\not\to 0\ donc\ \sum u_n(x)\ DVG$$

$$u_n(1)=\frac{1}{n},\ \sum u_n(1)\ DV$$

$$u_n(-1)=\frac{(-1)^n}{n},\ \sum u_n(-1)\ CV\ \ (\ CSSA\ )$$

$$\sum u_n\ CVS\ sur\ E_C=[-1,1[$$

<u>2° exemple :</u>

$$u_n(x)=n(n-1)x^{n-2}\quad pour\quad x\in]-1,1[,\ on\ \ a\ \ u_n(x)=\left(x^n\right)''$$

$$or\ \sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}u_n(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

<u>I) Rayon de convergence d'une série entière :</u>

<u>1°) Définition</u>

On appelle série entière toute série de fonctions complexes de la forme $u_n(z)=a_nz^n$ où $a_n\in\mathbb{C}$
Si D est l'ensemble de convergence de cette série, on définit sur D, $S(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ qui est la somme de la série entière.

<u>2°) Lemme d'Abel :</u> (1802 - 1829)

Th : S'il existe $z_0\neq 0$ tel que la suite $\left(a_nz_0^{\ n}\right)$ soit bornée alors la série $\sum a_nz^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z|<|z_0|$

$$Dem :\ \left|a_nz^n\right|=\left|a_nz_0^n\right|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\leq K\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\quad or\ \ \frac{|z|}{|z_0|}<1\Rightarrow\sum\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\ CVA$$

En particulier : Si la série $\sum a_nz_0^{\ n}$ CV alors la suite est CV donc bornée et le lemme s'appliquera

<u>3°) Convergence de la série entière :</u>

Th : Pour toute série entière $\sum a_nz^n$, il existe un réel positif R (éventuellement ∞) tel que :

$$|z|<R\Rightarrow\sum a_nz^n\ CVA$$

$$|z|>R\Rightarrow\sum a_nz^n\ DV$$

Dem : Soit $D_C=\left\{z\in\mathbb{C},\ tels\ que\ \sum a_nz^n\ CV\right\}$, $E=\left\{|z|\ tel\ que\ z\in D_C\right\}$
E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car 0 appartient à E

1°cas : E est majorée, elle admet donc une borne supérieure appelée R
si R est nul alors $\forall z \neq 0$, $\sum a_n z^n$ *DV*
si R est non nul, soit z *tel que* $|z| < R$*, R est le plus petit des majorants de E, donc il existe* $|z_0| \in E$ *tel que* $|z| < |z_0| < R$*, or* $\sum a_n z_0^n$ *CV donc d'après le lemme d'Abel* $\sum a_n z^n$ *CVA.*
Soit z tel que $|z| > R \Rightarrow \exists z_1$ *tel que* $|z| > |z_1| > R$
si $\sum a_n z^n$ *CV alors* $\sum a_n z_1^n$ $CVA \Rightarrow |z_1| \in E$ *ce qui est impossible*

2° cas : E n'est pas majorée, on pose alors $R = +\infty$
Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists |z_0| \in E$ *tel que* $|z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n$ *CVA*

Def : Au vue de ce théorème et du lemme d'Abel, on peut définir le rayon de convergence R d'une série entière de terme général $a_n z^n$ *comme la borne supérieure dans* $[0,+\infty]$ *de l'ensemble des réels positifs r tels que* $(a_n r^n)$ *soit bornée*
R est appelé rayon de convergence de la série entière
$B(0,R)$ *= disque de convergence*
De manière générale : Si R est connu alors $B_0(O,R) \subset E_C \subset B_F(O,R)$

<u>4°) Technique de détermination de R :</u>

Règle de D'Alembert spécifique aux séries entières (uniquement si $a_n \neq 0$, $\forall n$ *)*
Th : Soit une série entière de terme général $\sum a_n z^n$*, telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
Alors si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ *alors* $R = \frac{1}{L}$

Dem : On pose $u_n = a_n z^n$*, nous avons alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L|z|$ *si* $z \neq 0$
1°cas : si L = 0, alors $\forall z$, $\sum u_n$ *CVA donc* $R = \infty$
2° cas : si L = ∞*, alors* $\forall z \neq 0$, $\sum u_n$ *ne CV pas absolument donc* $R = 0$
3° cas : D'après la règle de d'Alembert
$\sum u_n$ *CVA si* $|z| < \frac{1}{L} \Rightarrow R \geq \frac{1}{L}$
$\sum u_n$ *ne CV pas absolument si* $|z| > \frac{1}{L}$
Supposons que $R > \frac{1}{L}$ *soit l'existence de* z_0 $\left(R > |z_0| > \frac{1}{L} \right)$ *donc* $\sum a_n z_0^n$ *CVA, ce qui est en contradiction. Donc* $R = \frac{1}{L}$

Exo : Déterminer les rayons de convergence de $\sum \ln(n) x^n$, $\sum \frac{x^n}{n}$, $\sum \frac{x^n}{(3n)!}$, $\sum n!\,x^n$

Exo : Etudier l'ensemble de convergence de la série entière $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

Prop : Le rayon de convergence de la série de terme général $n^\alpha x^n$ *vaut* 1

Que faire lorsque $a_n = 0$ pour une infinité de valeurs ? On dit que la suite est lacunaire
On utilise la règle de d'Alembert dans le cas général afin d'obtenir un minorant de R, puis on prouve une divergence afin d'obtenir un majorant de R

Exemple : $\sum \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n}$ *et* $\sum \frac{x^{2n+1}}{3n+1}$

R est la borne supérieure de l'ensemble des réels r tels que $\left(|a_n| r^n\right)$ *soit bornée*

(soit aussi tel que $\sum a_n r^n$ *CV)*
Rem : Si $\sum a_n r^n$ *diverge alors* $R \leq |r|$

Prop : Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon respectif* R_a *et* R_b
Si $|a_n| \leq |b_n|$ *alors* $R_a \geq R_b$
Si $|a_n| \sim |b_n|$ *alors* $R_a = R_b$

Dem : Si $|z| < R_b : |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ *or* $\sum b_n z^n$ *CVA* $\Rightarrow \sum a_n z^n$ *CVA* $\Rightarrow R_a \geq R_b$

A partir d'un certain rang $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}|b_n| \Rightarrow |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

On obtient l'inégalité dans l'autre sens car la relation d'équivalence est symétrique

Exo : Soit $d(n)$ *le nombre de diviseurs de n, déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum d(n) x^n$

<u>*5°) Algèbre des séries entières :*</u>

Pour $u_n(z) = a_n z^n$, $v_n(z) = b_n z^n$*, on peut définir les opérations :*

- $(u_n + v_n)(z) = (a_n + b_n) z^n$
- $\lambda u_n(z) = \lambda a_n z^n$
- *si* $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q, \;\; w_n(z) = c_n z^n$

Pour ces 3 opérations (somme, produit par un scalaire et produit de Cauchy), l'ensemble des séries entières possède une structure d'algèbre

Prop : Le rayon de convergence de la somme de 2 séries entières est au moins égal au plus petit des 2 rayons : $R \geq \min(R_1, R_2)$*. Si* $R_1 \neq R_2$ *alors* $R = \min(R_1, R_2)$

Dem : si $|z| < \min(R_1, R_2)$ *alors les séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *CVA* $\Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n$ *CVA*

donc $R \geq \min(R_1, R_2)$

On suppose $R_1 < R_2$ *alors si* $R_1 < |z| < R_2 \Rightarrow \sum a_n z^n$ *DV et* $\sum b_n z^n$ *CVA d'où la divergence de la série somme, donc* $R \leq R_1 = \min(R_1, R_2)$

(remarque : la somme de séries divergentes peut être convergente)

Prop : Les séries entières $u_n(z)$ *et* $\lambda u_n(z)$ *avec* $\lambda \neq 0$ *ont le même rayon de convergence*

Prop : Le rayon de convergence du produit de Cauchy de 2 séries entières est au moins égal au plus petit de 2 rayons : $R \geq \min(R_1, R_2)$

Dem : Si $|z|<\min(R_1,R_2)$ *alors les séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *CVA* $\Rightarrow \sum c_n z^n$ *CVA*
donc $R \geq \min(R_1,R_2)$

Exemple : On considère le produit de Cauchy des séries $\sum x^n$ *et* $\sum \frac{x^n}{n!}$

6°) Convergence normale :

Th : Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, *R est supposé non nul, la série est alors normalement convergente sur tout compact contenu dans le disque ouvert de convergence*

Dem : On considère K une partie compacte du disque ouvert de convergence K est bornée, $\exists\, r>0$ *tel que* $K \subset B_F(0,r) \subset B_o(0,R)$
Si $z \in K \Rightarrow |z| \leq r < R \Rightarrow |u_n(z)| = |a_n z^n| \leq |a_n r^n|$
Donc $\sup\limits_{z\in K}|u_n(z)| = \|u_n\|_{\infty,K} \leq |a_n r^n|$ *or* $\sum a_n r^n$ *CVA* $\Rightarrow \sum \|u_n\|_{\infty,K}$ *CV*
D'où la CVN sur tout compact K

Rem : Si $\sum a_n R^n$ *CV, il y a CVN sur le disque fermé*

II) Somme d'une série entière d'une variable réelle :

1°) Continuité et limite aux bornes du disque de convergence :

Th : La somme d'une série entière est une fonction continue sur son disque ouvert de convergence
Dem : On utilise la CVN sur toute partie compacte du disque ouvert de convergence

Th : (d'Abel radial) Si $\sum a_n x^n$ *a pour rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}^+$ *et si* $\sum a_n R^n$ *est convergente, on pose* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *Alors* $\lim\limits_{x\to R} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$
Dem : HP (on utilise la transformation d'Abel)

Exemple : On démontre aisément que $\forall x \in]-1,1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n = \ln(1+x)$, *comme* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ *CV on obtient par le théorème d'Abel radial :* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

2°) Dérivabilité :

Lemme : Une série entière à termes réels et sa série dérivée ont même rayon de convergence
Dem : On note $u_n(x) = a_n x^n$ *de rayon R et* $u_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ *de rayon R'*
Soit x tel que $|x| < R' \Rightarrow \exists x_0$ *tel que* $|x| < |x_0| < R' \Rightarrow \sum n a_n x_0^{n-1}$ *CVA*

$$|a_n x^n| = |n a_n x_0^{n-1}| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \frac{|x_0|}{n} \leq M\,\frac{R'}{n}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = w_n \quad car \quad \left(n a_n x_0^{n-1}\right) \to 0 \ \ donc\ est\ bornée\ par\ M$$

$$Or\ \ \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{n+1}\left|\frac{x}{x_0}\right| \to \left|\frac{x}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum w_n\ CV \Rightarrow \sum a_n x^n\ CVA \Rightarrow R \geq R'$$

Soit x tel que $|x| < R \Rightarrow \exists \alpha$ *tel que* $|x| < |x| + \alpha < R \Rightarrow \sum a_n (|x|+\alpha)^n$ *CVA*

Or $\left|a_n (|x|+\alpha)^n\right| \geq |a_n| \left[|x|^n + n\alpha |x|^{n-1} \right] \Rightarrow \left|n a_n x^{n-1}\right| \leq \frac{1}{\alpha} \left|a_n (|x|+\alpha)^n\right|$

donc $\sum n a_n x^{n-1}$ *CVA et finalement* $R' \geq R$

Th : La somme d'une série entière à termes réels est de classe C^1 sur son disque ouvert de convergence et on a $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Corollaire : La somme d'une série entière à termes réels est de classe C^∞ *sur son disque ouvert de convergence. Et on a pour tout entier p* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$

Application : Déterminer l'expression de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$

3°) Intégrabilité :

Th : Soit la série entière $\sum a_n z^n$ *, pour tous réels a et b du disque ouvert de convergence, S est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a* $\int_a^b \left(\sum_0^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_0^{\infty} \int_a^b a_n t^n dt$

En particulier pour $|x| < R$, $\int_a^x \left(\sum_0^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_0^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Exemple : $\forall x \in]-1,1[\ , \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n \, \mathrm{d}t = -\ln(1-x)$

Intérêt : Calcul de somme de série en utilisant le théorème d'Abel radial $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

III) Développement en série entière d'une fonction réelle (DSE) :

1°) Définitions :

Def : Soit une fonction définie sur I dans $\mathbb{R}$*, s'il existe une suite* (a_n) *de réels et R > 0 tels que* $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R,R[$*, on dit que f est développable en série entière . On dit aussi que la fonction admet un DSE*

2°) Existence de développement en SE :

Th (CN) : Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ *sur* $]-R,R[$

Th (CN) : Si f est développable en série entière à l'origine alors f admet un développement limité en 0 à l'ordre n pour tout entier n et on a $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *on dit que f est développable en série de Taylor et* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Dem : Si f admet un D.S.E alors on a $f^{(p)}(x)=\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} \Rightarrow f^{(p)}(0)=p!a_p$

Ainsi $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+x^n\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$

Or la série entière converge normalement donc uniformément sur $[-\varepsilon,\varepsilon]\subset\left]-R,R\right[$*, donc par le théorème de la double limite* $\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p=o(1)$

Ainsi $f(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+o(x^n)$

Conséquence : Si f admet un développement en série entière à l'origine alors il est unique

Rem : Une fonction C^∞ *sur* $\left]-R,R\right[$ *n'est pas nécessairement développable en série entière*

Dem : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ *si* $x\neq 0$ *et* $f(0)=0$

Il est clair que f est de classe C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$*. On montre par récurrence que pour tout entier n, il existe un polynôme* P_n *tel que, pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

On obtient la relation de récurrence

$P_0(x)=1,\ P_1(x)=2$ *et* $P_{n+1}(x)=x^3P_n'(x)+\left(2-3nx^2\right)P_n(x)$

Ainsi on déduit que f est de classe C^∞ *en 0 et que* $f^{(n)}(0)=0$ *par le théorème de prolongement par continuité*

Si f admet un D.S.E alors f sera donc nulle sur $\left]-R,R\right[$ *ce qui est impossible*

Rem : Si f est C^∞ *sur* $\left]-r,r\right[$ *et si* $\exists A$ *tel que pour* $|x|<r$, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le A,\ \forall n\in\mathbb{N}$ *alors f est développable en série entière de rayon* $R\ge r$

Le principe consiste à écrire la formule de Taylor avec reste intégral et majorer ce reste !!

$$\forall x\in I,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=T_n(x)+R_n(x)$$

<u>*3°) Les développements usuels (**A connaître**)*</u>

- *Les exponentiels : de rayon* $R=\infty$

$$e^x=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \mathrm{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!},\ \mathrm{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!},\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exo : Déterminer le D.S.E. de $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+x}$ *et* $g(x)=e^{x\mathrm{ch}(\alpha)}\mathrm{ch}(x\mathrm{sh}(\alpha))$

- *A partir des séries géométriques :*

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad et \quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad et\ le\ rayon\ R=1$$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$, $Arc\tan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

On peut aussi retenir $\dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^{n-p}$

Dem : On sait $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ *est* C^p *sur* $]-1,1[$ *et* $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(p)}=\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{n=p}^{+\infty}n(n-1)...(n-p-1)x^{n-p}$

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x.\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

- *Les fonctions rationnelles*

On effectue une décomposition en éléments simples

Exo : Déterminer le D.S.E. de $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

- *Utilisation d'une équation différentielle*

On obtient sur $]-1,1[$, $(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

Dem : On considère la fonction $f(x)=(1+x)^\alpha$ *sur* $]-1,1[$, *on a* $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

f est solution du problème de Cauchy suivant $\begin{cases}(1+x)y'(x)-\alpha y(x)=0 & (E)\\ y(0)=1\end{cases}$

Recherchons une solution de ce problème du type $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *sur* $]-R,R[$ *avec* $R\leq 1$

y solution de (E) donne $\sum_{p=0}^{\infty}\left[(p+1)a_{p+1}+(p-\alpha)a_p\right]x^p=0$

Par unicité du D.S.E on obtient $a_{p+1}=\dfrac{\alpha-p}{p+1}a_p$ *pour* $p\geq 0$

Donc si $n\neq 0$, $a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}a_0$ *où* $a_0=y(0)=1$

En vertu de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, f est bien développable en série entière, et nous obtenons son développement

De plus en appliquant la règle de d'Alembert on obtient $R=1$

Exo : Déterminer le D.S.E. de $x\mapsto\sqrt{1-x}$

<u>IV) Applications :</u>

<u>1°) Les équations différentielles linéaires :</u>

On cherche des solutions particulières développables en série entière

Exo : $2xy''(x)+y'(x)-y(x)=0$

<u>2°) Calcul de sommes de série :</u>

$\sum_{n\geq 0}\left(a+bn+cn^2\right)\dfrac{x^n}{n!}=\left(a+(b+c)x+cx^2\right)e^x$

Exo : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right)x^n$

3°) Les fonctions complexes ou matricielles :

On définit ainsi l'exponentielle complexe sur $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_0^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Prop : L'exponentielle complexe est un morphisme de groupe $(\mathbb{C},+)$ *dans* $(\mathbb{C},\times)$

i.e. : $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\times\exp(z_2)$

Plus généralement : $e^z = e^x e^{iy}$ *,* e^z *est un complexe de module* e^x *et d'argument y*

On peut ainsi définir les fonctions ch, sh, sin *et* cos *sur* $\mathbb{C}$ *et retrouver toutes les formules trigonométriques sur* $\mathbb{C}$

Exo : Soit $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & 5 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$*, calculer* $C=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^{2n}}{(2n)!}$ *en fonction de* I_3 *et* A

4°) Systèmes différentiels linéaire à coefficients constants

Prop : L'application $t\mapsto \exp(tA)$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\exp(tA))' = A\exp(tA)$

Dem : $A\in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow tA \in M_n\left(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$

On définit alors $t\mapsto \exp(tA)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$ *qui est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$

$$(\exp(tA))' = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^{k+1} = A\exp(tA)$$

Th : Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, la solution générale du système différentiel homogène* $X'(t)=AX(t)$ *est donnée par* $X(t)=\exp(tA)C$ *où* $C\in\mathbb{R}^n$

Dem : La matrice $\exp(tA)$ *est inversible car* $\exp(tA)\exp(-tA)=I_n$

$$X\in S \Leftrightarrow X'(t)-AX(t)=0 \Leftrightarrow \exp(-tA)\left[X'(t)-AX(t)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\exp(-tA)X(t)\right]'=0 \Leftrightarrow \exp(-tA)X(t)=C \Leftrightarrow X(t)=\exp(tA)C$$

Plus généralement le système $\begin{cases}X'(t)=AX(t)\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$ *où* $t_0\in I,\ X_0\in\mathbb{R}^n$ *a pour solution la fonction* $t\mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$ *qui est une exponentielle de matrice*

Exo : Résoudre les systèmes

$$\begin{cases}x_1'(t)=x_1(t)+x_2(t)\\ x_2'(t)=x_2(t)+x_3(t)\\ x_3'(t)=x_3(t)+x_4(t)\\ x_4'(t)=x_4(t)\end{cases} , \quad \begin{cases}x'(t)=x(t)-y(t)\\ y'(t)=x(t)+3y(t)\\ x(0)=1\ ,\ y(0)=2\end{cases}$$