**Saint Rémi : MP**
**David Corneillie**

**Chap A5 : Exercices vus en classe ou à faire**

## *I ) II ) Rayon et domaine de convergence d'une série entière*

*Exo1 :*
*Déterminer l'ensemble de convergence de la série de terme général suivant* $\ln(n+1)x^n$
*Exo2 :*
*Déterminer l'ensemble de convergence de la série de terme général suivant* $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$
*Exo3 :*
*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général suivant* $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$
*Exo4 :*
*Déterminer l'ensemble de convergence de la série de terme général suivant* $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$
*Exo5 :*
*Soit la fonction f définie par* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n}$
*Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f*
*Soient* $b_n=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, $u_n=\ln\left(b_n\sqrt{n}\right)$ *et* $c_n=u_{n+1}-u_n$
*Montrer que* $c_n\sim\dfrac{K}{n^2}$ *lorsque n tend vers l'infini, en déduire la nature de la série de terme général* $c_n$, *puis de celle de la série de terme général* $b_n$
*Exo6 :*
*On note* $d(n)$ *le nombre de diviseurs de l'entier n non nul, déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $d(n)z^n$
*Exo7 :*
*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $a_nz^n$ *où* $a_n=\int_0^1\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)^n e^t\mathrm{d}t$
*Exo8 :*
*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général suivant* $\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
*Exo9 :*
*Soit n un entier naturel, on appelle* $a_n$ *le nombre de couples* $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $2x+3y=n$
*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $a_nz^n$
*Exo10 :*
*On considère la fonction définie par* $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ , *la somme d'une série entière de rayon R > 0.*
*Déterminer le rayon de convergence de* $\sum\dfrac{a_n}{n!}x^n$

*Exo11 :*

*Soit* $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n^\alpha}$ *,* $n>0$*, déterminer l'ensemble de convergence simple de* $\sum u_n$ *en fonction de* $\alpha$

*Déterminer l'ensemble de convergence normale de* $\sum u_n$ *en fonction de* $\alpha$ *que l'on notera* $D_\alpha$*. La somme de la série est elle continue sur* $D_\alpha$

*Exo12 :*

*Déterminer la somme de la série de terme général* $a_n x^n$ *où* $a_{2n}=4^n$ *et* $a_{2n+1}=5^{n+1}$

*Exo13 :*

*Prouver la sommabilité de la famille* $u_{i,j}=\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$*, pour* $(i,j)\in\mathbb{N}^2$*.Puis calculer sa somme*

*Exo14 :*

*Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$

*Exo15 :*

*Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right)x^n$

*Exo16 :*

*Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(2+(-1)^n\right)^n z^n$

*Exo17 :*

*On considère la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{2x^n}{n^2-1}$

*Déterminer la rayon de convergence R de cette série*

*On note S la fonction somme* $\displaystyle S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x^n}{n^2-1},\ \forall x\in\left]-R,R\right[$*, déterminer S*

*Montrer que* $S$ *est continue sur* $[0,1]$ *et préciser la valeur de* $S(1)$

*Exo18 :*

*Soit* $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}x^n,\ \forall p\in\mathbb{N}$*. Déterminer l'expression de* $f(x)$

*Exo19 :*

*Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

## ***III ) Développement en série entière***

*Exo20 :*

*On considère la fonction définie par* $f(x)=\dfrac{x\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ *avec* $\sin\alpha\neq 0$

*Développer f en série entière.*

*Exo21 :*

*On considère la fonction définie par* $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

*Développez f en série entière .*

*Exo22 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $e^{x\mathrm{ch}(\alpha)}\mathrm{ch}\left(x\mathrm{sh}(\alpha)\right)$

*Exo23 :*

*Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par* $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

*Exo24 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$

*Exo25 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+x}$

*Exo26 :*

*Soit la fonction g définie sur* $]-1,1[$ *par* $g(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

*Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera. En déduire le développement en série entière de g et préciser son rayon de convergence .*

*Exo27 :*

*Soit la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\exp\left(e^x\right)$

*Déterminer pour tout entier naturel n la valeur de* $f^{(n)}(0)$

*Exo28 :*

*Développer en série entière* $x\mapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$

*Exo29 :*

*Soit* $(u_n)$ *la suite de réels telle que* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_k u_{n-k}$

*Exprimer* $u_n$ *en fonction de n*

*( On pourra introduire la fonction* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ *sur* $]-R,R[$ *)*

*Exo30 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\operatorname{sh}(\arcsin x)$

*Exo31 :*

*Soit la fonction f définie par* $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

*Montrer que si f admet un développement en série entière du type* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ *alors* $a_0=1$ *et montrer que* $a_n$ *s'exprime en fonction des* $(a_i)$ *pour i allant de 0 à* $n-1$*, on précisera cette expression*

*Montrer que pour tout n,* $|a_n|\le 1$

*Montrer que f admet un développement en série entière dont le rayon R est supérieur à* 1

*Exo32 :*

*Soit* $a\in\,]-1,1[$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, l'application définie par* $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sh}\left(a^n x\right)$

*Etablir que f est développable en série entière, préciser son rayon de convergence et former ce développement en série entière*

*Exo33 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$

*Exo34 :*

*On considère la suite de réels* $(a_n)$ *vérifiant* $a_0=1$ *et* $2a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\quad \forall n\ge 0$

*On pose* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ *. Déterminer S et préciser son rayon de convergence*

*Exo35 :*

*Développer en série entière la fonction définie par* $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

*Exo36 :*

*Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par* $f(x)=\ln\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

*Exo37 :*

*Soit* $x\in\mathbb{R}$*, on définit la fonction g sur* $]-1,1[$ *par* $g(a)=\arctan\left(\frac{a\sin x}{1-a\cos x}\right)$

*Déterminer un développement en série entière de g*

*Exo38 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(t)=\arctan(1+t)$

*Exo39 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\operatorname{ch}(x)\cos(x)$

*Exo40 :*

*Déterminer le développement en série entière de* $f(x)=\frac{3x+7}{(x+1)^2}$

## ***IV ) Calcul de somme***

*Exo41 :*

*Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

*Exo42 :*

*Déterminer la somme de la série de terme général* $\left(a+bn+cn^2\right)x^n$

*Exo43 :*

*Déterminer la somme de la série de terme général* $\left(a+bn+cn^2\right)\frac{z^n}{n!}$

*Exo44 :*

*Etudier la nature de la série de terme général* $u_n=n^{(-1)^n}x^n$ *et préciser sa somme*

*Exo45 :*

*Etablir la somme de la série entière* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$

*Exo46 :*

*Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(3^n-2^n\right)}$

*Exo47 :*

*Calculer* $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}2^{k2^{-k}}$

*Exo48 :*

*Soit* $\alpha\in\,]-1,1[$ *, on désigne la série de terme général* $w_n(x)=\frac{\alpha^n}{n}\cos(nx)$

*On pose* $W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)$. *Montrer que W est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et donner l'expression de* $W'(x)$ *à l'aide de fonctions usuelles. Calculer* $\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$

*Exo49 :*

*Soit* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-1,1[$. *On pose* $A_n=\sum_{p=0}^{n} a_p$

*Déterminer l'expression de* $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ *pour* $x\in\,]-1,1[$

*Exemple : calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)x^n$

## IV ) Equation différentielle

*Exo50 :*

*On considère l'équation différentielle :* $2xy''(x)+y'(x)-y(x)=0$ .

*Déterminer les fonctions réelles de la variable réelle développables en série entière solution de cette équation .*

*Dans le cas où* $f(0)=1$, *exprimer la solution à l'aide de fonctions usuelles*

*Exo51 :*

*Déterminer les fonctions réelles de la variable réelle développables en série entière solution de l'équation différentielle suivante* $2x(1-x)y''(x)+(2-5x)y'(x)-y(x)=0$

*Exo52 :*

*Déterminer les fonctions réelles de la variable réelle développables en série entière solution de l'équation différentielle suivante* $x^2y''(x)+4xy'(x)+2y(x)=\ln(1+x)$

*Exo53 :*

*Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle suivante*
$x^2(1-x)y''(x)-x(1+x)y'(x)+y(x)=0$

*Exo54 :*

*Déterminer les fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(x)=1-\int_0^x (x+t)f(x-t)\mathrm{d}t$

*Exo55 :*

*Soit la suite* $(a_n)$ *telle que* $a_0=a_1=1$ *et* $a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}$

*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $a_n x^n$ *( on pourra montrer que* $a_n\le n^2$ *)*

*Calculer* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *( on pourra regarder* $(1-x)f(x)$ *). En déduire l'expression de* $a_n$

*Exo56 :*

*Soit* $f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$. *Déterminer le développement en série entière de f*

*Exo57 :*

*Soit la fonction f définie sur* $]-1,1[$ *par* $f(x)=\frac{x}{\ln(1-x)}$ *si* $x\neq 0$ *et* $f(0)=-1$

*Montrer que f vérifie le problème* $x(1-x)y'(x)-(1-x)y(x)=y^2(x)$ *et* $y(0)=-1$

*On suppose que f admet un développement en série entière sur* $]-R,R[$ *, montrer que les coefficients de la série entière vérifient pour* $n\geq 1,(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}=\sum_{p=0}^{n}a_pa_{n-p}$ *, puis montrer que pour* $n\geq 4$ *les coefficients vérifient* $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}+\sum_{p=2}^{n-2}a_pa_{n-p}$

*Montrer que les coefficients vérifient également* $\forall n\geq 2, a_n=\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{n-k+1}$

<u>*Exo58 :*</u>

*Soit* $a_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ *,* $n\geq 0$ *. On pose alors* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$

*Justifier que f est* $C^\infty$ *sur* $]-1,1[$

*A l'aide d'une relation immédiate entre* $a_{n+1}$ *et* $a_n$ *, montrer que* $f'(x)=1+x^2f'(x)+xf(x)$

*En déduire l'expression de f*

<u>*Exo59 :*</u>

*Trouver les solutions développables en série entière de* $\begin{cases}x^2y''(x)+x(x+1)y'(x)-y(x)=0\\ y'(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$

<u>*Exo60 :*</u>

*On considère la suite définie par* $a_0=a_1=1,\ \forall n\geq 1\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}a_{n-1}$

*Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $a_nx^n$

*Déterminer l'expression de* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$

***<u>Systèmes différentiels à coefficients constants :</u>***

<u>*Exo61 :*</u>

*Résoudre* $\begin{cases}x'(t)=x(t)-y(t)\\ y'(t)=x(t)+3y(t)\\ x(0)=1\ ,\ y(0)=2\end{cases}$

<u>*Exo62 :*</u>

*Résoudre :* $\begin{cases}x'(t)=-x(t)-y(t)+e^{-t}\\ y'(t)=x(t)-3y(t)+e^{t}\end{cases}$ *et* $x(0)=1\ ,\ y(0)=2$

<u>*Exo63 :*</u>

*Résoudre* $\begin{cases}x'(t)=y(t)+2z(t)\\ y'(t)=-x(t)-2z(t)\\ z'(t)=x(t)-y(t)\end{cases}$

<u>*Exo64:*</u>

*Résoudre* $\begin{cases}x'(t)=-n^2x(t)\\ y'(t)=(1-n^2)y(t)-z(t)\\ z'(t)=y(t)-(1+n^2)z(t)\end{cases}$ *avec* $x(0)=y(0)=z(0)=0$

*Exo65 :*

*Résoudre* $\begin{cases} x'(t)=7x(t)+y(t)+4z(t) \\ y'(t)=-x(t)-7y(t)-4z(t) \\ z'(t)=-6x(t)+6y(t) \\ x(0)=2,\ y(0)=1\ ,\ z(0)=-2 \end{cases}$

*Exo66 :*

*Résoudre* $\begin{cases} x_1'(t)=x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t)=x_2(t)+x_3(t) \\ x_3'(t)=x_3(t)+x_4(t) \\ x_4'(t)=x_4(t) \end{cases}$

## Permutation somme et intégrale

*Exo67 :*

*On considère la fonction définie par* $f(x)=\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *, la somme d'une série entière de rayon R > 0.*

*Déterminer le rayon de convergence de* $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ *. On notera* $\varphi$ *sa somme*

*Montrer que pour tout réel x appartenant à* $]-R,R[$ *,* $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(tx)\,\mathrm{d}t$

*Exo68 :*

*Montrer que* $\int\limits_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

*Exo69 :*

*Montrer que* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-3x}}{1-e^{-4x}}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3+4n)^2}$

*Exo70 :*

*Montrer que* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$