

**Chap A6 :
Fonctions de plusieurs variables réelles**

E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie ($\dim E = p$ et $\dim F = n$)

U est un ouvert de E

$$f : U \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Les applications $f_i : x \mapsto f_i(x)$ sont appelées fonctions coordonnées

Si $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$, l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_j : t \mapsto f(a_1, \dots, t, \dots, a_p)$ est la $j^{\text{ième}}$ application partielle en a .

1) Continuité et différentiabilité :

1°) Continuité en a de U :

Def : $f : U \rightarrow F$ est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

i.e. : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$

Th : f est continue en a si et seulement si ses n applications coordonnées sont continues en a

Dem : On choisit comme norme sur F , $\|y\|_F = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |y_i|$

($\Rightarrow$) On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ ce qui garantit la continuité de toutes les applications coordonnées

($\Leftarrow$) $\forall i, f_i$ est continue, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_i > 0$ tel que $\|x - a\| < \alpha_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

on pose alors $\alpha = \inf_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha_i$ et si $\|x - a\| < \alpha$ alors $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Rem : Un test de non continuité : si $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \not\rightarrow f(0,0)$

Rem : La continuité par rapport à chaque variable ne prouve pas la continuité !!!

Exo : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $h(0, 0) = 0$

2°) Dérivée partielle :

Def : Soient h un vecteur et f une fonction définie au voisinage de $a \in U$, on suppose que $a + th \in U$ et on définit l'application $\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$, $t \in \mathbb{R}$

On dit que f est dérivable en a selon h lorsque φ_h est dérivable en 0

On pose alors $D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ ce vecteur est appelé le vecteur dérivé de f en a selon h

Def: On pose $\beta = (e_j)_{j=1..p}$ la base canonique de E , on appelle dérivée partielle selon la $j^{\text{ème}}$ variable de f en a le vecteur dérivé de f en a selon e_j

On la note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t}$ (il s'agit de la dérivée de l'application γ_j)

Def : On appelle dérivées partielles des applications coordonnées les applications définies par

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a+te_j) - f_i(a)}{t}$$

En particulier si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$$

Exo : Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pour $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$

3°) Différentiabilité et application tangente :

Def : $f : U \rightarrow F$ est différentiable en a si $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ où ℓ est une application linéaire de E dans F . ℓ est appelée la différentielle de f en a ou l'application linéaire tangente (notée df_a)

Rem : La différentielle est toujours continue

On appellera matrice Jacobienne de f en a par rapport aux bases (e_j) de E et (ε_i) de F la matrice de cette application linéaire, $J_f(a) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Rem : Si f est constante alors sa différentielle est nulle

Si f est une application linéaire alors f est aussi sa différentielle

Dem : $f(a+h) = f(a) + f(h)$ or f est bien linéaire

Rem : Si f est une fonction d'une seule variable alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et $f'(a) = df_a \cdot 1$

4°) Des propriétés :

Prop : Si f différentiable en a alors f est continue en a

Prop : Si f différentiable en a alors f admet des dérivées partielles en a

Dem : On a $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on choisit $h = te_j$

$$f(a+te_j) = f(a) + t\ell(e_j) + |t|\varepsilon(t)$$

ainsi $\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} \rightarrow \ell(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, ce qui assure l'existence des dérivées partielles

Rem : Si (e_j) est une base de E et $\ell = df_a \Rightarrow \ell(e_j) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1..n}$

Conséquence : On note $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ alors Jacobienne = $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Rem : La réciproque est fausse

Exemple : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Exo : Etudier la différentiabilité de

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$

Th : Si f admet des dérivées partielles continues sur U alors f est différentiable en tout point de U . On dit alors que f est de classe C^1 sur U

Dem : Admise (hors programme)

Exo : Etudier $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + y)^3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Exo : Déterminer la différentielle de $f: M \mapsto \text{tr}(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$

Prop : L'ensemble de fonction de classe C^1 sur U (noté $C^1(U, F)$) est un espace vectoriel

et $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$

4°) Composition des différentielles (dérivation à la chaîne) :

Th : Si f est C^1 sur U et g sur $V = f(U)$ alors $g \circ f$ est aussi de classe C^1 sur U , et on a

$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$, $J(g \circ f)_a = J(g)_{f(a)} \cdot J(f)_a$

Dem : $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} F$, $a \in U$ et $b = f(a) \in V$

$f(a+h) = f(a) + \ell_1(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$ et $g(b+k) = g(b) + \ell_2(k) + \|k\| \varepsilon_2(k)$

Posons $k = f(a+h) - f(a) = \ell_1(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$

$g \circ f(a+h) = g(b+k) = g \circ f(a) + \ell_2(\ell_1(h)) + \|k\| \varepsilon_2(k)$

Soit $g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + \ell_2 \circ \ell_1(h) + \|h\| \varepsilon_3(h)$ avec $\varepsilon_3(h) = \ell_2(\varepsilon_1(h)) + \frac{\|k\|}{\|h\|} \varepsilon_2(k)$

ℓ_2 est continue donc $\ell_2(\varepsilon_1(h)) \rightarrow 0$

$\|k\| \leq \|\ell_1(h)\| + \|h\| \|\varepsilon_1(h)\| \leq \|h\| [K + \|\varepsilon_1(h)\|] \Rightarrow \frac{\|k\|}{\|h\|}$ est borné, donc $\varepsilon_3(h) \rightarrow 0$

Exo : Calculer $g'(t)$ avec $g(t) = f(3+4t, t^2 - t)$

Exo : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi: (x, y) \mapsto (u, v)$ telle que $u = x + 2y$ et $v = 2x + y$, on pose $f(x, y) = g(u, v) = g \circ \varphi(x, y)$. Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g

II) Etude des fonctions coordonnées :

1°) Algèbre $C^1(U)$:

U un ouvert de E (souvent $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) et f une application de U dans $\mathbb{R}$

Prop : $(C^1(U), +, \cdot, \times)$ forme une algèbre, on a alors pour tout a élément de U
 $d(\alpha f + \beta g)_a = \alpha df_a + \beta dg_a$ et $d(fg)_a = f(a).dg_a + g(a).df_a$

Dem : On a $f(a+h) = f(a) + \ell_1(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$ et $g(a+h) = g(a) + \ell_2(h) + \|h\| \varepsilon_2(h)$

$fg(a+h) = fg(a) + g(a)\ell_1(h) + f(a)\ell_2(h) + \|h\| \varepsilon_3(h)$ avec

$$\varepsilon_3(h) = \frac{1}{\|h\|} \ell_1(h)\ell_2(h) + \ell_1(h)\varepsilon_2(h) + \ell_2(h)\varepsilon_1(h) + f(a)\varepsilon_2(h) + g(a)\varepsilon_1(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$$

$$\text{car } |\ell_1(h)\ell_2(h)| \leq K_1 K_2 \|h\|^2$$

2°) Le gradient :

On définit sur $\mathbb{R}^p$ la structure d'espace euclidien, $(e_i)_{i=1}^p$ la base canonique

On définit alors $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$, $df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$

C'est le gradient de f en a , noté également $\text{grad}_f(a)$

Ex : En dimension 2, $h = (h_1, h_2)$, $df_a(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)$

Def : f est de classe C^1 sur U , a est un point critique de f sur U lorsque $df_a = 0$ ce qui équivaut à $\nabla f(a) = 0$

Def : f admet en a un maximum local ou relatif lorsque il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

f admet en a un minimum local ou relatif lorsque il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, f(x) \geq f(a)$$

f admet en a un maximum global ou absolu sur U lorsque $\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$

f admet en a un minimum global ou absolu sur U lorsque $\forall x \in U, f(x) \geq f(a)$

Th : Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f

Dem : On suppose que f admet en a un maximum local

$\exists V \in V(a)$, tel que si $a+h \in V$, $f(a+h) \leq f(a)$

Or $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ donc on pose $h = te_i$

$$t > 0 \Rightarrow \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \ell(e_i) + \varepsilon(t) \leq 0 \text{ donc si } t \rightarrow 0 \text{ alors } \ell(e_i) \leq 0$$

$$t < 0 \Rightarrow \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \ell(e_i) + \varepsilon(t) \geq 0 \quad \text{donc si } t \rightarrow 0 \text{ alors } \ell(e_i) \geq 0$$

Finalement $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ell(e_i) = 0$

Exo : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$, f admet-elle un extremum local à l'origine ?

Exo : Montrer que $f(x, y) = x^2 y^2 (1 + x + 2y)$ admet un minimum local à l'origine

3°) Dérivées partielles du second ordre :

U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On suppose que

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et est différentiable sur U . On peut définir : $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

On peut aussi généraliser et définir les dérivées partielles d'ordre k par récurrence

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_j \dots \partial x_p} \right)$$

Def : Une fonction sera de classe C^k sur U lorsque les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U

Th de Schwarz (Hermann 1843-1921)

Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U (ses dérivées partielles existent et sont C^1) alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

Dem : On pose $\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

avec $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$ on a $\Delta(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$

Or φ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis

$$\exists \theta_1 \in]0, 1[\text{ tel que } \Delta(h, k) = h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = h \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right]$$

On applique ensuite le théorème des accroissements finis à $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$

$$\exists \theta_2 \in]0, 1[\text{ tel que } \Delta(h, k) = h k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \right]$$

On pose ensuite $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ on a $\Delta(h, k) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0)$

or ψ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis

$$\exists \theta_3 \in]0, 1[\text{ tel que } \Delta(h, k) = h \psi'(y_0 + \theta_3 k) = k \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \theta_3 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3 k) \right] \text{ On}$$

applique ensuite le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_3 k)$

$$\exists \theta_4 \in]0, 1[\text{ tel que } \Delta(h, k) = h k \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \right]$$

$$\text{Finalement } \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \right] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \right]$$

Et donc lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ les continuités des dérivées secondes donnent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Contre exemple : (de Peano Giuseppe 1858-1932)

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad f(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \text{ donc } f \notin C^2$$

4°) Matrice hessienne :

Def : On suppose f de classe C^2 sur U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice $H_f(a) \in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients en (i, j) sont $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Cette matrice est symétrique réelle.

$$\text{Exemple : } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ alors } H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Notation de Monge (Gaspard 1746-1818)

$$\begin{cases} p = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{cases} \quad \begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{cases} \quad Hf(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Th : (formule de Taylor à l'ordre 2)

$$\text{Si } f \text{ est classe } C^2 \text{ sur } U \text{ alors } f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Par exemple si E est de dimension 2 et si on pose $h = (h_1, h_2) \in V(0)$

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 \right] + o(\|h\|^2)$$

Ou encore $f(a+h) = f(a) + ph_1 + qh_2 + \frac{1}{2} [rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2] + o(\|h\|^2)$ (notation de Monge)

Dem : Soit $a \in U$ qui est ouvert donc $\forall h \in V(0), a+h \in U$. On suppose U convexe, ainsi $\forall t \in [0, 1], a+th \in U$. On pose $g: t \mapsto f(a+th)$ qui est de classe C^2 sur $[0, 1]$ alors

$$g'(t) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a+th) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a+th) \quad \text{car } a+th = (a_1 + th_1, a_2 + th_2)$$

$$g''(t) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th)$$

D'après la formule de Taylor sur les fonctions d'une variable

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t) g''(t) dt = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \int_0^1 (1-t) [g''(t) - g''(0)] dt$$

$$\text{car } \int_0^1 (1-t) [g''(t) - g''(0)] dt = \int_0^1 (1-t) g''(t) dt + g''(0) \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_0^1 = \int_0^1 (1-t) g''(t) dt - \frac{1}{2} g''(0)$$

On obtient donc $g(1) = g(0) + ph_1 + qh_2 + \frac{1}{2}[rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2] + \int_0^1 (1-t)[g''(t) - g''(0)]dt$

Or $t \mapsto g''(t) - g''(0)$ est C^0 sur $[0,1] \Rightarrow \exists \theta \in [0,1]$ tel que $\sup_{t \in [0,1]} |g''(t) - g''(0)| = |g''(\theta) - g''(0)|$

$$\left| \int_0^1 (1-t)[g''(t) - g''(0)]dt \right| \leq \frac{1}{2} |g''(\theta) - g''(0)|$$

$$|g''(\theta) - g''(0)| \leq h_1^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right| + 2|h_1h_2| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right| + h_2^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right|$$

Les continuités des dérivées partielles d'ordre 2 assurent que $|g''(\theta) - g''(0)| \leq \|h\|^2 o(1)$

5°) Etude d'extremum local :

Th : Si f est classe C^2 sur U et si f admet un minimum local en a alors $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$

Dem : a est déjà un point critique de f donc la formule de Taylor nous donne

$$\forall h \in V(0), f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq 0 \text{ ce qui implique que}$$

$$\langle H_f(a)h, h \rangle = {}^t h H_f(a) h \geq 0$$

Th : Si f est classe C^2 sur U et si f admet un maximum local en a alors $H_f(a) \in S_n^-(\mathbb{R})$

Th : Si f est classe C^2 sur U , si a est un point critique tel que $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet en a un minimum local

Dem : en effet $\langle H_f(a)h, h \rangle = 0 \Leftrightarrow h = 0$

Th : Si f est classe C^2 sur U , si a est un point critique tel que $H_f(a) \in S_n^{--}(\mathbb{R})$, alors f admet en a un maximum local

Cas de la dimension 2 : $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est positive $\Leftrightarrow \det(H_f) = rt - s^2 \geq 0$ et $\text{trace}(H_f) = r + t \geq 0$

En effet il suffit que les 2 valeurs propres soient positives

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \text{ est définie positive } \Leftrightarrow \det(H_f) = rt - s^2 > 0 \text{ et } \text{trace}(H_f) = r + t > 0$$

Exo : Etudier les extrema de $f(x, y) = x^2 y^2 (1 + x + 2y)$ sur $\mathbb{R}^2$

Exo : Etudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

6°) Exemple d'étude d'extremum lié :

Exo : Soit V un réel positif, déterminer les pavés de $\mathbb{R}^3$ de volume V dont l'aire sera minimale

Dem : On note x, y et z les cotes du pavés, on a $V = xyz$ et $A = 2(xy + xz + yz)$

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{V}{x^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{V}{y^2}$$

On obtient un unique point critique $M = (\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2V}{x^3}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2V}{y^3}$$

$$Hf(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est définie positive, donc } f \text{ prend en } M \text{ un minimum}$$

Exo : Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ et la fonction définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$

Etablir que f admet un maximum et un minimum sur C

Th : (optimisation sous contrainte)

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω , on note $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$

Soit $a \in X$ tel que $dg_a \neq 0$, si la restriction de f sur X admet un extremum local en a alors df_a est colinéaire à dg_a

III) Applications :

1°) Résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP):

Def : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^p$. Une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 de U dans V est un changement de variables lorsque f est bijective de U sur V , on a donc f qui admet une réciproque de V dans U de classe C^1 sur V

Rem : $f : U \rightarrow V, b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ et $d(f^{-1})_b = [d(f)_a]^{-1}$

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (x, y)$ telle que $x = u + v$ et $y = u - v$

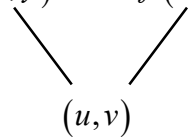
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + y) \\ v = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases}, \quad J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } J_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Applications à la résolution des EDP

Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$

On posera : $x = u + v$ et $y = u - v$

Le schéma donne : $(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) = w(u, v)$



on a $(u, v) = \varphi(x, y) \Rightarrow f(x, y) = w \circ \varphi(x, y)$ d'où $J(f)(x, y) = J(w)(\varphi(x, y))J(\varphi)(x, y)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial u}(\varphi(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial v}(\varphi(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial u}(\varphi(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial v}(\varphi(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

2°) Passage en coordonnées polaires :

Th : L'application $\varphi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ réalise un changement de variables

Exo : Soit $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Résoudre $\left(x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right) = a \sqrt{x^2 + y^2}$ où a est un réel non nul

Application calcul de gradient et du Laplacien (en polaire) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, f(x, y) = g(r, \theta) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$$

3°) Vecteur tangent à une partie de E :

Def : Soit X une partie de E et $x \in X$, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$

On notera alors $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x

Ex : Voir l'ensemble des vecteurs tangents à une sphère de $\mathbb{R}^3$

Th : Si g est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert Ω de E dans $\mathbb{R}$, soient X une partie de E et $x \in X$ tel que $dg_x \neq 0$, alors $T_x X$ est égale au noyau de dg_x

Dem : Admise

Exemple : On considère la surface X définie par l'équation $g(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$

On prend le vecteur $(1, 1, 1)$, $dg_{(1,1,1)} : (x, y, z) \mapsto 2x - 4y + 2z$

On pose $v = (x-1, y-1, z-1) \in T_x X \Leftrightarrow dg_{(1,1,1)}(v) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) = 0$

On retrouve ici l'équation du plan tangent de la surface X en $(1, 1, 1)$

De manière générale la surface X est définie par $g(x, y, z) = 0$, soit $(a, b, c) \in X$ tel que $\nabla g(a, b, c) \neq 0$ alors le plan tangent à X en (a, b, c) a pour équation :

$$(x-a) \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) + (y-b) \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) + (z-c) \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

4°) Dérivée le long d'un arc :

Soit γ une application définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans E de dimension finie, f une fonction différentiable sur U telle que $\gamma(I) \subset U$, on appelle dérivée de f le long de la courbe définie par γ l'application $t \mapsto (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$

Exemple : Soit la fonction définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$, calculer la dérivée de f selon la courbe C définie par $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$

Th : Si f est C^1 sur U , si γ est C^1 sur $I = [0, 1]$ dans U telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors

$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$. Cette intégrale sera aussi appelée intégrale curviligne d'un champ de gradient, on la note $\int_{\Gamma} f$ ou $\oint_{\Gamma} f$ si $\Gamma = \gamma([0, 1])$

Dem : Soit $g : t \mapsto f(\gamma(t))$, g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$

donc $\int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = [g(t)]_0^1 = f(b) - f(a)$

Conséquence : Si $\gamma(I)$ est fermée alors $\int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = 0$

Exo : Soit Γ une courbe plane de classe C^1 , d'extrémités les points $A(2, 0)$ et $B(1, 1)$

Calculer $\int_{\Gamma} (y^3 + 6xy^2) dx + (3xy^2 + 6x^2y) dy$

Prop : $\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est la circulation d'un champ de gradients le long de la courbe Γ s'il existe une fonction f de classe C^1 sur un ouvert contenant Γ telle que

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Attention : Ne pas confondre avec d'autres intégrales curvilignes (voir CCP 2012)

Calculer $\int_{\Gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ où Γ est le cercle de centre O et de rayon 1

Th : Si f est C^1 sur U connexe par arcs alors f est constante sur U si et seulement si $\forall x \in U, df_x = 0$

Dem : on fera la démonstration dans le cas où U est convexe

$(\Leftarrow) \forall (a, b) \in U^2, U \text{ est convexe} \Rightarrow \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continue et même C^1

telle que $\gamma(t) = a + t(b - a)$ et $\varphi([0, 1]) \subset U$ alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = 0$, donc f est

constante sur U

$(\Rightarrow) \forall x \in U$ soit h tel que $x + h \in U \Rightarrow [x, x + h] \subset U$ donc $\forall t \in [0, 1], x + th \in U$

Soit $g : t \mapsto f(x + th)$, g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(t) = df_{(x+th)}h$

Or f est constante sur U donc $\forall t \in [0, 1], g(t) = f(x) = \text{constante}, g'(t) = 0$

Donc $df_{(x+th)} = 0, \forall h$, si $h \rightarrow 0$ par continuité des dérivées partielles $df_x = 0$