Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap A6 : Exercices vus en classe ou à faire

I) Continuité et différentiabilité

Exo1 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que* $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=0$

Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que* $g(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $g(0,0)=0$

Soit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que* $h(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2-xy+y^2}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $h(0,0)=0$

Etudier la continuité de ces 3 fonctions sur $\mathbb{R}^2$

Exo2 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que* $f(x,y)=(x+y)^2\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=0$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. *Montrer que f est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$

Exo3 :

La fonction définie par $f(x,y)=x^2\ln\left(x^2+y^2\right)$ *et* $f(0,0)=0$ *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exo4 :

La fonction définie par $g(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *et* $g(0,0)=0$ *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exo5 :

La fonction définie par $h(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ *et* $h(0,0)=0$ *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exo6 :

La fonction définie par $p(x,y)=\left(x^2+xy\right)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et* $p(0,y)=0$ *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exo7 :

Soit la fonction f définie par $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=0$

Montrer que f est continue en $(0,0)$. *Montrer que f admet des dérivées partielles que l'on précisera en* $(0,0)$. *f est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exo8 :

On pose $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $f(0,0)=0$. *La fonction f est elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exo9 :

Soit la fonction f : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *telle que* $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=0$

Montrer f est continue puis C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *mais n'est pas* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ *. Que peut-on conclure ?*

Exo10 :
On considère la fonction définie sur $M_n(\mathbb{R})$ *par* $f(M)=tr(M^3)$
Déterminer la différentielle de f .
Exo11 :
On considère la fonction définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ *par* $f(M)=M^{-1}$
Déterminer la différentielle de f .
Exo12 :
Soient f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *et g définie par* $g(t)= f(a+4t,b-t)$ *où* $(a,b)\in \mathbb{R}^2$
Calculer $g'(t)$ *et* $g''(t)$
Exo13 :
Soient les fonctions f et g définies par :
$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$
$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $g(x,y)=(2x+y,x-3y)$
Déterminer les dérivées partielles de $(x,y)\mapsto fog(x,y)$ *de deux manières différentes*
Exo14 :
Soient les fonctions f et g définies par :
$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x,y)=\sin(x^2-y^2)$
$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $g(x,y)=(x+y,x-y)$
Déterminer les dérivées partielles de $(x,y)\mapsto fog(x,y)$ *de deux manières différentes*
Exo15 :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *, f une fonction de classe* C^2 *sur U à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *, on définit le Laplacien de f en* $(x,y)\in U$ *par* $\Delta f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$*. Une fonction f de classe* C^2 *sur U est dite harmonique sur U lorsque pour tout* $(x,y)\in U$ *,* $\Delta f(x,y)=0$ *, on notera* $f\in H(U)$
On suppose f de classe C^3 *et harmonique sur U, montrer que ces dérivées partielles sont aussi harmoniques sur U*
Déterminer les fonctions $f\in H(U)$ *telles que* $f^2\in H(U)$
Déterminer un exemple de 2 fonctions f et g non constantes et harmoniques sur U, telles que $fg\in H(U)$

II) Etude d'extremum

Exo16 :
Soit la fonction définie par $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$
Déterminer les points critiques de f
Cette fonction f présente-t-elle en $(2,1)$ *un extremum local ?*
Exo17 :
$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$*, étudier les extrema locaux*
Exo18 :
$f(x,y)=x^2y^2(1+x+2y)$ *sur* $\mathbb{R}^2$*, montrer que f admet à l'origine un mimimum local*
Etudier les éventuels autres extrema locaux
Exo19 :
$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$*, étudier les extrema locaux*
Exo20 :
Etudier les extrema locaux de la fonction définie par $f(x,y)=xy^2+\ln(4+y^2)$

Exo21 :

Etudier les extrema de $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ *sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Exo22 :

Soit la fonction définie par $f(x,y)=x^2+x^2y+y^3$

Cette fonction admet-elle des extrema locaux ?

Exo23 :

Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$ *par* $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

Exo24 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ *par*

$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^x$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=1$

Etudier la continuité de f .

Etudier l'existence de dérivées partielles de f en $(0,0)$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=f(x,0)$ *si* $x\neq 0$ *et* $g(0)=1$*, étudier les variations de g. En déduire que f n'admet pas d'extremum local en* $(0,0)$

Déterminer les points critiques de f. Montrer que pour tout $x\geq 0$*,* $f(x,y)\geq g(x)$*, en déduire que f admet un minimum local en* $\left(\frac{1}{e},0\right)$

La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(\frac{-1}{e},0\right)$ *?*

La fonction f admet-elle d'autres extrema locaux ?

Exo25 :

Etudier les extrema de la fonction $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$

Exo26 :

Déterminer le triangle d'aire maximale inscriptible dans un cercle de rayon R

Exo27 :

Déterminer les pavés de $\mathbb{R}^3$ *de volume V dont l'aire est minimale*

Exo28 :

Soit la fonction définie par $f(x,y)=x^3-3x\left(1+y^2\right)$

Etablir que f admet un maximum et un minimum sur C où $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\right\}$*, les déterminer*

III) Les EDP et plan tangent

Exo29 :

Calculer le Laplacien du passage en coordonnées polaires

Exo30 :

Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)$ *puis* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=0$

On posera : $x=u+v$ *et* $y=u-v$

Exo31 :

Soit $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Résoudre $z(x,y)=1+\dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)$*, on posera* $u=xy$ *et* $v=\dfrac{y}{x}$

Exo32 :

Soit $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$

Résoudre $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)=a\sqrt{x^2+y^2}$ *où a est un réel non nul*

Exo33:

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$

On posera $u=x+\alpha y$, $v=x+\beta y$; α *et* β *étant judicieusement choisis*

Exo34 :

On considère une fonction f de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *qui vérifie*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+3(x-y)\,f(x,y)=0 \qquad (1)$$

Soit l'ouvert $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x>y\right\}$ *et* $\varphi:(x,y)\mapsto(u,v)=(xy,x+y)$ *l'application définie sur U. Montrer que* φ *est une application bijective de U sur un ouvert V que l'on précisera .*

A l'aide de l'application $F=fo\varphi^{-1}$ *définie sur V, résoudre* (1)

Exo35 :

Soient les fonctions f : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *telles que* $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\neq 0$

On considère l'équation : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Montrer qu'une telle fonction f qui ne s'annule pas vérifie cette équation si et seulement si il existe a : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *telle que :* $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=a(x)\,f(x,y)$

En déduire que les solutions de l'équation qui ne s'annulent pas sont exactement de la forme : $(x,y)\mapsto\varphi(x)\psi(y)$, φ *et* ψ *sont des fonctions de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *ne s'annulant pas sur* $\mathbb{R}$

A-t-on unicité d'un tel couple (φ,ψ) *?*

Exo36 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Résoudre $f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$*, on posera* $u=x+y$ *et* $v=x-y$

Exo37 :

On pose $\varphi:(x,y)\to\left(u=xy,v=\frac{x}{y}\right)$ *, justifier que* φ *est une bijection de* $\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$ *sur lui même*

Résoudre : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ *, où* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exo38 :

Déterminer les points de la surface définie par $z=3xy-3x^2-y^2$ *où le plan tangent contient la droite passant par* $A(0,0,1)$ *et* $B(1,1,3)$

Exo39 :

Déterminer les points de la surface définie par $z=4x^2+y^2$ *où le plan tangent est parallèle au plan d'équation* $x+2y+z=6$

Exo40 :

On considère C le cercle trigonométrique orienté positivement

Calculer $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y$

Calculer $\int_C xy\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$