Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap AG1 : Exercices vus en classe ou à faire

Rappels préliminaires :

Exo1 :
f une application de E dans F et g de F dans G, montrer les affirmations suivantes
si f et g sont injectives alors gof est injective
si f et g sont surjectives alors gof est surjective
si gof est surjective alors g est surjective
si gof est injective alors f est injective
si gof est injective et f surjective alors g est injective
si gof est surjective et g injective alors f est surjective

Exo2 :
L'application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par* $f(n)=n+2$ *si n est pair et* $f(n)=n+4$ *si n est impair, est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exo3 :
Soit la relation $\forall (z,z')\in \mathbb{C}^2,\ zRz' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z'=\dfrac{z\cos\theta+\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}$
Montrer que R est une relation d'équivalence et déterminer la classe de 0

Exo4 :
Soit l'application f : $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *telle que* $f(x,y)=(x',y')$ *avec*
$x'=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ *et* $y'=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$*, montrer que f est bijective.*

Exo5 :
Soit f une application de E dans E telle que $fofof = f$ *.*
Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective

Exo6 :
Soit $(A,+,\times)$ *un anneau tel que* $\forall x\in A,\ x^2=x$ *.*
On définit la relation R sur A par $\forall (x,y)\in A^2,\ xRy \Leftrightarrow xy=x$
Montrer que R est une relation d'ordre sur A

Exo7 :
f définie de E dans F. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall y\in F,\ f\left(f^{-1}(\{y\})\right)=\{y\}$

Exo8 :
Sur $\mathbb{R}$ *, montrer que la relation suivante est une relation d'équivalence :* $xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$

I) Les groupes :

Exo9 :
$E=\mathbb{Q}-\{1\}$*, on pose* $a*b=a+b-ab$ *; montrer que* $(E,*)$ *est un groupe*

Exo10 :
$E=]-1,1[$*, on pose* $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$*; montrer que* $(E,*)$ *est un groupe*

Exo11 :
$(G_1,*)$ *et* $(G_2,*)$ *sont 2 groupes.*
Montrer que $(G_1\cup G_2,*)$ *est un groupe* $\Leftrightarrow G_1\subset G_2$ *ou* $G_2\subset G_1$

Exo12 :
Soit $(G,*)$ *un groupe non abélien*

Montrer que $\Gamma=\{\alpha\in G,\forall x\in G,\ \alpha*x=x*\alpha\}$ *est un sous groupe de G*

Exo13 :
Soit $(G,*)$ *un groupe, H un sous groupe de G est dit distingué lorsqu' il vérifie la propriété suivante :* $\forall x\in G,\forall y\in H, x^{-1}yx\in H$

Soit f endomorphisme de G .
Montrer que $\ker f$ *est distingué dans G .*

Montrer que si H est distingué dans G alors $f(H)$ *l'est dans* $\operatorname{Im} f$ *.*

Exo14 :
Soit G un groupe multiplicatif engendré par 2 éléments x et y tels que $x^3=y^2=(xy)^2=e$ *où e est l'élément neutre et x, y sont distincts de e.*
Montrer que G ne possède que 6 *éléments.*

Exo 15:
Soit $(G,\times)$ *un groupe abélien, x et y sont* 2 *éléments de G d'ordre respectif p et q*

On suppose p et q premiers entre eux. On note $(F,\times)$ *le sous groupe de G engendré par* $z=xy$. *Montrer que x et y sont éléments de F*

Exo16 :
Montrer que l'ensemble G des matrices de la forme $\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *avec* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *est un groupe pour le produit matriciel . Trouver le centre de ce groupe*

Exo17 :
Déterminer les automorphismes de $(\mathbb{Z},+)$

Exo18 :
Montrer que l'ensemble des matrices $M_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x^2 & 1 & x\\ 2x & 0 & 1\end{pmatrix}$ *où* $x\in\mathbb{R}$ *est un sous groupe de* $GL_3(\mathbb{R})$ *isomorphe à* $(\mathbb{R},+)$

Exo19 :
Soit $(G,*)$ *un groupe tel que* $\forall x\in G,\ x^2=e$. *Montrer que G est abélien*

Exo20 :
$(G,\times)$ *un groupe tel que* $\forall(x,y)\in G^2,\ x^2y^2=(xy)^2$. *Montrer que G est abélien*

Exo21 :
Soit G un groupe cyclique d'ordre n et x un générateur de G.

Montrer que l'ordre de x^r *est* $\dfrac{n}{n\wedge r}$

Exo22 :
Soit $(G,\times)$ *un groupe, H un sous groupe cyclique de G et K un sous groupe de G.*

Montrer que $H\cap K$ *est cyclique*

Exo23 :
Soit G un groupe multiplicatif abélien
x est d'ordre a et y est d'ordre b
On suppose que a et b sont premier entre eux. Montrer que xy est d'ordre ab

Exo24 :

Soit G un groupe multiplicatif tel que $\forall x \in G,\ x^2 = 1$

Montrer que G est commutatif

Soit H un sous groupe de G différent de G, on pose $a \in G - H$

Montrer que $H \cap aH = \varnothing$

Exo25 :

Soit $(e_i)_{i=1}^{n}$ *une base de E, Une matrice M est de permutation s'il existe* $\sigma \in S_n$ *telle que* $Me_i = e_{\sigma(i)}$

Montrer que l'ensemble des matrices de permutations forme un groupe multiplicatif

II) Les anneaux et les corps

Exo26 :

Soit $A = \left\{m + n\sqrt{5}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, *montrer que* $(A,+,.)$ *est un anneau dont on précisera les éléments inversibles*

Exo27 :

Soit $(A,+,.)$ *un anneau commutatif, on dit qu'un élément x de A est nilpotent s'il existe un entier n non nul tel que* $x^n = 0$

Montrer que si x et y sont nilpotents alors le produit xy *et la somme* $x+y$ *le sont aussi*

Montrer que si $(1-x)$ *est nilpotent alors x est inversible*

Exo28 :

Soit D l'ensemble $\mathbb{R}^2$ *muni des 2 lois de composition interne :*

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \quad et \quad (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+x'y)$$

Montrer que ces deux lois confèrent à D une structure d'anneau commutatif. Est-il intègre ?

Quels sont les éléments inversibles de D ? Préciser l'inverse d'un élément inversible

Exo29 :

On considère un anneau $(A,+,\times)$ *tel que* $\forall x \in A,\ 6x = x+x+x+x+x+x = 0$

On pose $A_1 = \{x \in A, x+x = 0\}$ *et* $A_2 = \{x \in A, x+x+x = 0\}$. *Montrer que* A_1 *et* A_2 *ont une structure d'anneau et que* $A_1 + A_2 = A$

Que peut-on dire de xy *et* yx *si* $x \in A_1$ *et* $y \in A_2$ *?*

Exo30 :

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau non commutatif , si x est un élément de A*

On note $C(x) = \{y \in A,\ xy = yx\}$. *Cet ensemble est appelé commutant de x, montrer qu'il est un sous anneau de A.*

A est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 *à coefficients réels, soit* $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *étudier la forme des éléments de* $C(M_1)$, *et en déduire que* $C(M_1)$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}$.

Exo31 :

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ *.On pose* $Ad = \{(x,y), y-x \in d\mathbb{Z}\}$, *montrer que* Ad *est un sous anneau de* $\mathbb{Z}^2$

On pose $(A,+,\times)$ *un sous anneau de* $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$

Montrer que $H = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tel que } (x,0) \in A\}$ *est un sous groupe de* $\mathbb{Z}$

En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *tel que* $A \subset Ad$

Exo32 :

Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs $900x - 84y = 12$

Exo33:

A un anneau commutatif, et I un idéal de A, on définit le radical de I comme suit :

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in A \,/\, \exists\, n \in IN^* \,,\, x^n \in I \right\}$$

Montrer que $I \subset \sqrt{I}$ *et que* $\sqrt{I}$ *est un idéal de A*

Montrer que $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. *Montrer que* $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

Exo34 :

Montrer que si a et c sont premiers entre eux et que b et c sont aussi premiers entre eux alors ab et c sont premiers entre eux

Montrer que si a est premier avec bc alors a est premier avec b

Exo35 :

On appelle anneau local tout anneau commutatif A dans lequel $V(A)$, *l'ensemble des éléments de A non inversibles, est un idéal.*

Montrer que si A est local alors $V(A)$ *est maximal, c'est-à-dire qu'il est le plus grand idéal autre que A inclus dans A*

Exo36 :

Soient a et b deux entiers premiers entre eux , a est impair et b est pair, soit d le PGCD de $(a+b)$ *et* $(a-b)$, *montrer que d divise a , en déduire que* $(a+b)$ *et* $(a-b)$ *sont premiers entre eux*

Exo37 :

14 ! + 1 est-il multiple de 15 et 20! + 1 est-il multiple de 21 ?

Exo38 :

On suppose $2^{n+1}-1$ *premier, calculer la somme des diviseurs de* $a = 2^n\left(2^{n+1}-1\right)$

Exo39 :

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau commutatif*

Montrer que A est un corps si et seulement si $\{0\}$ *et A sont les seuls idéaux de A*

Exo40 :

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau d'élément neutre* 1_A

Montrer qu'il n'existe qu'un seul morphisme de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ *dans* $(A,+,\times)$

Exo 41:

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_n = 2^{2^n}+1$, *montrer que si* $n \neq m$ *alors* a_n *et* a_m *sont premiers entre eux*

Exo42 :

Soit p un nombre premier, montrer que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$

Exo43 :

Soit A l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *où a et b sont des entiers relatifs.*

Montrer que A est un anneau pour l'addition et la multiplication matricielles, est il commutatif ?

Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ?

Quels sont les diviseurs de zéros de A ?

Exo44 :

Un idéal I de A est premier si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2, xy \in I \Rightarrow x \in I$ *ou* $y \in I$

Soit A un anneau abélien dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un corps

Exo45 :

On note $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des entiers rationnels, on considère p un nombre premier*

Soit $A = \left\{ x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ tel que } b \wedge p = 1 \right\}$. *Montrer que* $(A,+,\times)$ *est un sous anneau de* $(A,+,\times)$

Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est $\left\{ x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ tel que } a \wedge p = b \wedge p = 1 \right\}$

III) L'anneau Z/nZ :

Exo46 :

Montrer que 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$ *pour tout entier naturel n*

Exo47 :

Montrer que tout n entier naturel , $3^{n+3}-4^{4n+2}\in 11\mathbb{Z}$

Exo48 :

Résoudre $5x=5$ *dans* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $5x=4$ *dans* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $5x=4$ *dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $4x=1$ *dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

Résoudre $\begin{cases}7x+5y=2\\5x+4y=0\end{cases}$ *dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

Exo49 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases}x\equiv 5\ [15]\\x\equiv 8\ [28]\end{cases}$, $\begin{cases}x\equiv 7\ [13]\\x\equiv 11\ [22]\end{cases}$

Résoudre $x^2-3x-7=0$ *dans* $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$

Résoudre $x^2+5x+4=0$ *dans* $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

Exo50 :

Soit p un entier supérieur à 2

Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)!\equiv -1\ [p]$

Exo51 :

Montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est* $D=\{\overline{a}\neq 0, a\wedge n\neq 1\}$

Exo52 :

Déterminer le dernier chiffre de l'entier 1997^k *où* $k=1998^{1999}$

Déterminer le dernier chiffre de $1987^{1995^{1998}}$

Exo53 :

Déterminer les deux derniers chiffres de 2^{2006} *et de* 3^{2014} *et de* 7^{2015}

Exo54 :

1. *Déterminer le reste de la division de* 251^{311} *par* 6 *(On pourra observer que* 251 *est premier avec* 6 *)*
2. *Soit n un entier tel que* $n=pq$ *où p et q sont des nombres premiers, exprimer* $\varphi(n)$ *en fonction de p et de q*
3. *On note e un nombre premier avec* $(p-1)(q-1)$, *établir l'existence d'un entier d tel que* $\overline{e}.\overline{d}\equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$
4. *Démontrer que pour tout élément* $\overline{a}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{a}^{e.d}\equiv\overline{a}\ [n]$

(pour info dans le système de cryptage RSA , l'entier e est connu de l'expéditeur , l'entier d du destinataire. L'entier d est très difficile à calculer si la factorisation de n n'est pas connue . Le chiffrement du message a par l'expéditeur se fait par $a\to a^e$ et le déchiffrement par le destinataire par $a^e\to\left(a^e\right)^d$, le message est ainsi décodé)

Exo55 :

Montrer que $\displaystyle\sum_{d \text{ diviseur de } n}\varphi(d)=n$

Exo56 :

On considère l'équation $x^2+y^2=z^2$ *dans* $\mathbb{N}^3$ *avec* $x\wedge y\wedge z=1$

Montrer que x, y et z sont premiers 2 *à* 2

Montrer que x et y sont de parité différente (on prendra x impair et y pair)

Montrer que z est impair

Déterminer $(z+x)\wedge(z-x)$

Montrer qu'il existe deux entiers u et v premier entre eux tels que
$x = v^2 - u^2$, $y = 2uv$ *et* $z = v^2 + u^2$

Exo57 :

Combien y a t'il d'élements inversibles dans dans $\mathbb{Z}/78\mathbb{Z}$ *et dans* $\mathbb{Z}/405\mathbb{Z}$

Exo58 :

Résoudre $\begin{cases} 3x \equiv 2\ [5] \\ 5x \equiv 1\ [6] \end{cases}$

Exo59 :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ *où* $(a_n;b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Exo60 :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin de N pièces d'or.
Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier qui n'est pas un pirate.
Celui ci reçoit 3 pièces
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et à nouveau partagé, le cuisinier reçoit 4 pièces
Dans un naufrage seul le butin, le cuisinier et 6 pirates sont rescapées. Le butin est à nouveau redistribué et le cuisinier reçoit 5 pièces
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer obtenir le cuisinier morsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

IV) L'anneau K[X] des polynômes :

Exo61 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ *par* $(x-a)(x-b)$

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ *par* $(x-a)^2$

Exo62 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n *par* $(x-1)^2(x-2)$

Exo63 :

Dans $\mathbb{R}[X]$ *déterminer le polynôme P de degré minimal qui soit divisible par* X^2+1 *et tel que* $P(X)-1$ *soit divisible par* X^3+1

Exo64 :

Soit l'équation (E) : $x^3 + px + q = 0$ *où p et q sont deux réels quelconques.*

Déterminer une condition sur p et q pour que (E) *ait une racine double.*

Exo65 :

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme A ait une racine multiple a dans $\mathbb{C}[X]$ *avec* $A(x) = x^5 + px^2 + q$

Exo66 :

Décomposer en éléments premiers dans $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $x^8 + x^4 + 1$

Exo67 :

Montrer qu'il existe un polynôme T_n *tel que* $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$

Montrer que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Exo68 :

On considère la suite (B_n) *de la variable réelle x définie par les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \forall x\in \mathbb{R},\ B_0(x)=1\ \forall n\in \mathbb{N}^*, \forall x\in \mathbb{R}, B'_n(x)=B_{n-1}(x) \\ \forall n\in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x=0 \end{cases}$$

Montrer que B_n est un polynôme de degré dont on précisera le terme dominant.
Expliciter B_1, B_2 et B_3
Montrer que pour tout $n\geq 2$, $B_n(0)=B_n(1)$
Montrer que $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N},\ B_n(x)=(-1)^n B_n(1-x)$

Exo69 :

Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que $(X-2)^2$ divise $P(X)+112$ et $(X+2)^3$ divise $P(X)-144$

Exo70 :

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, et $B=\{1, X, X^2\}$ sa base canonique
On considère 3 réels : $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$
Déterminer la famille de polynômes de E tels que $L_i(a_j)=0$ si $i\neq j$, $L_i(a_i)=1$

Exo71 :

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de coefficient dominant 1 admettant a comme racine dans $\mathbb{Q}$.
Montrer que $a\in\mathbb{Z}$

Exo72 :

Factoriser le polynôme $P(x)=x^5+ax^2+bx$ sachant que 1 est racine double

Exo73 :

Montrer que le polynôme $P(x)=x^3+3x^2+2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$

Exo74 :

Déterminer le pgcd des deux polynômes suivants :
$a(x)=3x^5-x^4-x^3-3x^2+x+1$ *et* $b(x)=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$

Exo75 :

Le polynôme $P(x)=x^3-5x^2+3$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}$?

Exo76 :

Justifier l'existence de 2 polynômes P et Q tels que $(1-x)^n P(x)+x^nQ(x)=1$
Justifier l'unicité de ces 2 polynômes s'il appartiennent à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
Déterminer ces 2 polynômes

Exo77 :

On considère (H_n) une famille de polynômes définie par $H_0(x)=1$, et pour tout entier naturel n $H_{n+1}(x)=xH_n(x)-H_n'(x)$
Montrer que pour tout n, H_n est unitaire de degré n
Montrer que pour tout n, $H_{n+1}'(x)=(n+1)H_n(x)$

Exo78 :

On considère $R(x)=x^3+px+q$ où $(p,q)\in\mathbb{R}^2$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour R admette 3 racines a,b et c 2 à 2 distinctes telles que $a^2+b^2=c^2+1$

Exo 79 :

Déterminer les polynômes P tels que pour tout x on ait : $P(x^2)=(x^2+1)P(x)$

<u>Exo 80 :</u>
Déterminer les polynômes P qui sont divisibles par leur dérivé

<u>V) Algèbre :</u>

<u>Exo 81 :</u>

Soit A l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Montrer que cet ensemble forme une algèbre dont on précisera une base .
<u>Exo82 :</u>

Dans $M_2(\mathbb{R})$*, on note* $F=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$*, où* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *avec* $b\neq 0$

On considère $\Gamma=\left\{M=xI+yF,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que $(\Gamma,+,\times,.)$ *est une algèbre commutative*