

**Chap AG2 :
Réduction d'endomorphismes et de matrices**

Rappels préliminaires

Def : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , on dit qu'un vecteur x est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$, s'il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, on dit aussi que $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$

Def : Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E lorsque $E = \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$

1° Espace vectoriel de dimension finie :

On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel possédant une famille génératrice finie, sinon la dimension est dite infinie. Une base est une famille libre et génératrice

Th : (dit de la base incomplète). E un espace vectoriel de dimension finie, soit $(x_i)_{i \in J}$ une famille libre de E , alors il existe une partie L telle que $(x_i)_{i \in J \cup L}$ soit une base de E . On dit donc que toute famille libre peut être complétée en une base

*Conséquence : Si E est de dimension n alors toute famille libre de n éléments est une base
Si E est de dimension n alors toute famille génératrice de n éléments est une base*

2°) Applications linéaires et familles de vecteurs :

Rappel : $f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

Th : L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im } f$

Dem : $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , $y \in \text{Im } f \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Or $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \Rightarrow y = \sum_{i \in I} \alpha_i f(x_i)$, donc la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im } f$

Corollaire : f est surjective si et seulement si l'image par f de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F

Th : f une application linéaire est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F

Dem : $(\Rightarrow)$ $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E

$\sum_{i \in I} \alpha_i f(x_i) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i\right) = 0$ or f est injective $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$ donc $\alpha_i = 0$ (libre)

$(\Leftarrow)$ Si f n'est pas injective, alors il existe x non nul tel que $f(x) = 0$, or $\{x\}$ est libre et $\{0\}$ est liée

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de E , $\forall x \in E$, $\exists (\alpha_i)_{i \in I}$ tels que $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \Rightarrow u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i u(x_i)$

Il suffit donc de connaître l'image des $(x_i)_{i \in I}$ par u pour déterminer $u(x)$

3°) Sous espaces supplémentaires :

Th : On a équivalence entre les 3 assertions suivantes

- (i) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$
- (ii) $\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$
- (iii) $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$

On dit alors que $E = F \oplus G$

Dem : (i $\Rightarrow$ ii) L'existence est assurée par $E = F + G$

On suppose que $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in F \cap G$

Donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$

(ii $\Rightarrow$ iii) Soit $x \in F \cap G$, $x = x + 0 = 0 + x$, par unicité de la décomposition $x = 0$

Soient $\beta_1 = (f_i)_{i=1..p}$ et $\beta_2 = (g_i)_{i=1..r}$ des bases respectives de F et G

On va prouver que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ est une base de E

$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$ or $x_1 = \sum_{j=1}^p \alpha_j f_j$ et $x_2 = \sum_{j=1}^r \gamma_j g_j$

Donc β est bien génératrice de E

Si $\sum_{j=1}^p \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^r \gamma_j g_j = 0$ alors $\sum_{j=1}^p \alpha_j f_j = -\sum_{j=1}^r \gamma_j g_j \in F \cap G$ donc $\sum_{j=1}^p \alpha_j f_j = 0$ et $\sum_{j=1}^r \gamma_j g_j = 0$

or les familles β_1 et β_2 sont libres donc tous les coefficients sont nuls, ce qui assure l'indépendance linéaire de la famille β qui est bien une base de E et donc $\dim E = \dim F + \dim G$

(iii $\Rightarrow$ i) $F + G \subset E$ et $\dim(F + G) = \dim F + \dim G = \dim E \Rightarrow F + G = E$

Il faut aussi justifier que (ii $\Rightarrow$ i) dans le cas où la dimension n'est pas finie

Soit $x \in F \cap G$, $x = x + 0 = 0 + x$, par unicité de la décomposition $x = 0$

L'existence d'une décomposition prouve que $E = F + G$

Def : Deux espaces F et G sont supplémentaires dans E lorsque $E = F \oplus G$

Ex : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Exo : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id = 0$ Montrer que E est la somme directe des sous espaces $\ker(f - 2Id)$ et $\ker(f - 3Id)$

Th : Si E est de dimension finie, alors tout sous espace F de E admet au moins un supplémentaire G

Dem : Si $F = E$ alors $E = E \oplus \{0\}$

Si $F = \{0\}$ alors $E = E \oplus \{0\}$

Sinon $F = \text{Vect}((e_i)_{i=1..p})$ alors $(e_i)_{i=1..p}$ est une famille libre de E donc on peut la compléter en une base de E , il existe $(e_i)_{i=p+1..n}$ tels que $(e_i)_{i=1..n}$ soit une base de E

On note $G = \text{Vect}((e_i)_{i=p+1..n})$, on montre ensuite que F et G sont supplémentaires

Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^p x_i e_i + \sum_{i=p+1}^n x_i e_i \in F + G$

Si $x \in F \cap G$ alors $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i = \sum_{i=p+1}^n x_i e_i \Rightarrow x = 0$ car la famille est libre

Rem : L'existence d'un supplémentaire est assurée même si la dimension n'est pas finie

4°) Théorème du rang :

Th : Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire G de $\ker u$ dans $\operatorname{Im} u$

Dem : Soit G un supplémentaire du noyau de u : $E = \ker u \oplus G$

On considère v la restriction de u sur G , montrons que v est injectif

$\ker v = G \cap \ker u = \{0\}$, donc v réalise une bijection de G sur $\operatorname{Im} v$

On a toujours $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$

Si $x \in \operatorname{Im} u$ alors $\exists y \in E$ tel que $x = u(y)$ or $y = z + t$ où $z \in G$ et $t \in \ker u$

Donc $x = u(z) = v(z) \in \operatorname{Im} v$ (car $z \in G$) donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans F , on rappelle le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$

Conséquence : Si f est un endomorphisme en dimension finie alors
 f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective $\Leftrightarrow f$ est bijective

5°) Un outil très utile : les projecteurs

Def : Tout endomorphisme de E vérifiant $pop = p$ est appelé projecteur de E

Prop : Si p est un projecteur de E , alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires

Tout projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau

Si p est un projecteur alors $\operatorname{Im} p = \ker(p - \operatorname{Id})$

Dem : $\forall x \in E, x = p(x) + x - p(x) = x_1 + x_2$ où $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im} p$

x_2 vérifie $p(x_2) = p(x - p(x)) = p(x) - pop(x) = 0 \Rightarrow x_2 \in \ker p$

Donc $E = \operatorname{Im} p + \ker p$

Si $x \in \operatorname{Im} p \cap \ker p \Rightarrow x = p(y)$ et $p(x) = 0 = pop(y) = p(y) = x$

Exo : Soient p et q deux projecteurs, montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $poq = qop = 0$

Exo : f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E . Montrer que $\forall x \in E, (f(x), x)$ est liée. En déduire que f est une homothétie vectorielle.

6°) Calcul matriciel :

Rappel : Soit f une application linéaire de E dans F deux espaces vectoriels de dimension finie, soient $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ des bases respectives de E et F , on définit la matrice de f par rapport à ses bases, la

matrice A dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$, $f(e_j)$ étant le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne

Rem : Si on pose E_i le vecteur colonne associé au $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique alors on aura toujours $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, E_i^T A E_j = a_{ij}$

Th : Les matrices $E_{i,j} = (\delta_{l,i} \delta_{k,j})_{1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq p}$ forment une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Donc $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$ et $\dim M_{n,p}(\mathbb{R}) = np$

• Le produit de 2 matrices : $AB = C$ tel que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$, en respectant les ordres, en effet pour que ce produit soit défini il faut que $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \Rightarrow C \in M_{n,q}(\mathbb{R})$

Exo : Observer l'effet sur A lorsqu'on multiplie à gauche ou à droite A par la matrice $E_{i,j}$

Exo : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA$. Montrer que A est la matrice d'une homothétie.

Prop : $M_n(\mathbb{R})$ forme une algèbre non commutative

• La transposée d'une matrice : $B = A^T$ telle que $b_{i,j} = a_{j,i}$

Prop : $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

Prop : Si $A_k \rightarrow A$ alors $A_k^T \rightarrow A^T$

• Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n noté $\det(A)$

Rappel : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$

On retient :

- la linéarité par rapport à chaque colonne
- le caractère alterné : deux colonnes identiques annulent le déterminant
- l'échange de 2 colonnes change le signe
- le calcul s'effectue par le développement par rapport à une ligne ou une colonne

Prop : $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(kA) = k^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Prop : Si $A_k \rightarrow A$ alors $\det A_k \rightarrow \det A$

• Les matrices définies par blocs (cas des matrices carrées)

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ avec $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-p}(\mathbb{R})$

On généralise les opérations algébriques

$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & C + \lambda C' \\ B + \lambda B' & D + \lambda D' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}$

Prop : Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ alors $\det(M) = \det(A) \det(C)$

Dem : $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$

• Matrice inversible et inverse de matrice carrée

Def : A est inversible (ou régulière) si et seulement si il existe une matrice A' telle que $AA' = A'A = I_n$, si elle existe, cette matrice est unique et est appelée inverse de A , notée A^{-1}

Prop : A est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}^n$, le système $AX = B$ admet une solution unique

$\Leftrightarrow$ son déterminant est non nul

Prop : Si A est inversible alors $AB = AC \Leftrightarrow B = C$

Prop : $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Prop : L'ensemble des matrices inversibles forme un groupe multiplicatif, appelé groupe linéaire d'ordre n , noté $GL_n(\mathbb{R})$

Théorie de Cramer (Gabriel 1704-1752) : Soit A une matrice carrée d'ordre n , le mineur de $a_{i,j}$ noté $A_{i,j}$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle cofacteur de $a_{i,j}$ le terme $(-1)^{i+j} A_{i,j}$, la comatrice de A est la matrice des cofacteurs, notée $\text{Com}(A)$

On calcule : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T$ et $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T B$

Rem : La formule $A(\text{Com}(A))^T = \det(A)I_n$ est toujours valable

- Rang d'une matrice

Def : On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent, on appelle rang d'une matrice le rang de ces vecteurs colonnes

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ alors $\text{rg}(A) \leq \inf(n, p)$

Prop : $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$, $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$

Dem : $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g \Rightarrow \text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$

donc $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$

On a immédiatement $\text{Im}(fg) \subset \text{Im } f \Rightarrow \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$

On a aussi $\ker g \subset \ker(fg) \Rightarrow n - \text{rg}(B) \leq n - \text{rg}(AB) \Rightarrow \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$

Prop : Si P et Q sont inversibles alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$

Dem : On a déjà $\text{rg}(AQ) \leq \text{rg}(A)$

Or si $x \in \text{Im } f \Rightarrow \exists y \in E$ tel que $x = f(y)$ or q est surjectif $y = q(z) \Rightarrow x = foq(z)$

Donc $\text{Im } f \subset \text{Im}(foq) \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \text{rg}(AQ)$

On a déjà $\text{rg}(PA) \leq \text{rg}(A)$

Soit $x \in \ker(pof) \Rightarrow pof(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in \ker p = \{0\} \Rightarrow x \in \ker f$

Donc $\ker(pof) \subset \ker f \Rightarrow n - \text{rg}(PA) \leq n - \text{rg}(A) \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \text{rg}(PA)$

Exo : Soit $M = AB^T + BA^T$ où $(A, B) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que (A, B) soit libre. Quel est le rang de M ?

- Formules de changement de bases :

Soit $B_E = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E et $B'_E = (e'_i)_{i=1}^n$ une nouvelle base de E , on a :

$\forall j, e'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ et $P = (\alpha_{ij}) = \text{mat}(Id, (e_i), (e'_i))$ la matrice de changement de base

Soit $x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j$ alors $X = PX'$

Dès lors si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A = \text{mat}(f, (e_i)_{i=1}^p, (f_i)_{i=1}^n)$

Si on note $P = \text{mat}(e_i \rightarrow e'_i)$ et $Q = \text{mat}(f_i \rightarrow f'_i)$

Alors $B = \text{mat}(f, (e'_i)_{i=1}^p, (f'_i)_{i=1}^n) = Q^{-1}AP$

Dem : $Y = AX \Leftrightarrow QY' = APX' \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}APX'$

Cas particulier : Si $A \in M_n(\mathbb{R}), P = \text{mat}(e_i \rightarrow e'_i)$, alors $B = \text{mat}(f, (e'_i)) = P^{-1}AP$

Exo : Soit la matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on pose $\varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, exprimer la matrice de f dans cette nouvelle base

• Matrices équivalentes et semblables :

Def : A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont équivalentes s'il existe P inversible de $GL_p(\mathbb{R})$ et Q inversible de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = Q^{-1}AP$

Prop : Cette relation est une relation d'équivalence (R.S.T.)

Th : Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n , relativement à deux couples de bases de E et F

Th : Une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par blocs par $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dem : ($\Rightarrow$) $\dim(\ker u) = p - r$, on note G un supplémentaire de $\ker u$

On note $\beta = (e_i)_{i=1..p}$ la base relative à $G \oplus \ker u = E$

Or tout supplémentaire du noyau est isomorphe à son image, $v = u/G$ est injective

Donc $(u(e_i))_{i=1..r}$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base de F

On note $\beta' = ((u(e_i))_{i=1..r}, (f_i)_{i=r+1..n})$

La matrice de u relativement à β et β' sera $J_{n,p,r}$

($\Leftarrow$) On ne change pas le rang en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible, or $A = Q^{-1}J_{n,p,r}P$

Corollaire : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang

Def : Dans le cas où $n = p$, on définit la notion de matrices semblables ; on dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Prop : La similitude entre deux matrices est une relation d'équivalence

Prop : Deux matrices semblables sont équivalentes

Rem : La réciproque est fausse, en effet toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ est équivalente à I_n car $P = P(I_n)I_n$, et la seule matrice semblable à I_n est I_n car $P(I_n)P^{-1} = I_n$

Th : Deux matrices carrées d'ordre n sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n relativement à deux bases de E

Exo : Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables

Exo : Soient $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

Exo : Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• La trace :

Def : Si $A \in M_n(K)$, on pose $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Prop : $Tr(A + \lambda B) = Tr(A) + \lambda Tr(B)$ et $Tr(AB) = Tr(BA)$

Prop : $Tr(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$

Prop : Deux matrices semblables ont même déterminant, même rang et même trace

Conséquence : Si p est un projecteur alors $tr(p) = rg(p)$

Dem : On démontre que toute matrice de projection est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en construisant une base adaptée à $E = \text{Im } p \oplus \ker p$

Exo : Soient deux matrices A et B telles que $AB - BA = A$, montrer que A n'est pas inversible

I) Quelques compléments :

1°) Somme directes de p sous espaces vectoriels

Def : Soit $(F_i)_{i \in [1, p]}$ une famille de p sous espaces vectoriels de E

On dit que la somme est directe lorsque $\forall i \in [1, p], F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$. On note alors $\bigoplus_{i \in [1, p]} F_i$

Prop : $\dim\left(\bigoplus_{i \in [1, p]} F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$

Dem : On prouve qu'une réunion de bases de F_i donne une base de $\bigoplus_{i \in [1, p]} F_i$

Def : On dira que $E = \bigoplus_{i \in [1, p]} F_i$ lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme la somme

d'éléments de F_i , $\forall x \in E, \exists! (x_i)_{i=1}^p$ tel que $x_i \in F_i$ et $x = \sum_{i=1}^p x_i$

Def : Si $E = \bigoplus_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} F_i$, on définit pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$

Prop : $\sum_{i=1}^p p_i = Id$

Dem : $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p p_i(x)$

2°) Sous espaces stables :

Soit u un endomorphisme de E , F un sous espace vectoriel de E est stable par u si et seulement si $\forall x \in F, u(x) \in F$

Ex : Le noyau et l'image d'un endomorphisme sont stables par cet endomorphisme

Th : Si u et v sont 2 endomorphismes qui commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre

Dem : Soit $x \in \ker u \Rightarrow u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0 \Rightarrow v(x) \in \ker u$

Soit $x \in \text{Im } u \Rightarrow x = u(y) \Rightarrow v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \Rightarrow v(x) \in \text{Im } u$

3°) Les restrictions et endomorphismes induits :

Def : Soit u un endomorphisme de E et F un sous espace vectoriel de E , on définit la restriction de u à F ou l'application linéaire induite sur F , par $u|_F : F \rightarrow E, \forall x \in F, u|_F(x) = u(x)$

Prop : Si F est stable par u alors $u|_F$ est un endomorphisme de F

Prop : Soit p la projection sur F parallèlement à un de ses supplémentaires alors on construit un unique endomorphisme de F par la composition $p \circ u|_F : F \rightarrow E \rightarrow F$

4°) Caractérisation en dimension finie :

Si $\dim E = n$, F un sous espace vectoriel de E stable par u tel que $\dim F = p < n$. On prend $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F que l'on prolonge pour obtenir une base de E .

Dans cette base la matrice de u sera triangulaire par blocs $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ où $A_1 = \text{mat}(u|_F, \beta_F)$

On aura ainsi $\det(A) = \det(A_1) \det(B_2)$

De manière générale si $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$ où F_i sont stables par u , on aura l'existence d'une base de E dans

laquelle $\text{mat}(u, \beta) = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_p \end{bmatrix}$ est donc diagonale par blocs où $A_i = \text{mat}(u|_{F_i}, \beta_{F_i})$

Rem : La réciproque est vérifiée

5°) Un exemple de drapeau :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{mat}(u, \beta)$, montrer que $E_1 = \ker(A + I)$, $E_2 = \ker(A + I)^2$, $E_3 = \ker(A + I)^3$

sont stables par u . En déduire que A est semblable à T triangulaire supérieure qui sera à déterminer

II) Polynômes d'endomorphisme :

1°) Définition :

Def : Soit E un espace vectoriel de dimension n , et u un endomorphisme de E .

On note $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$, $P \in K[X]$

On définit alors l'endomorphisme de E par $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$

On crée ainsi un morphisme d'algèbre $\varphi_u : K[X] \rightarrow \ell(E)$
 $P \mapsto P(u)$

Dem : $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$ et $Q(u) = \sum_{p \in \mathbb{N}} b_p u^p$, on a $\varphi_u(P + \lambda Q) = P(u) + \lambda Q(u)$, $\varphi_u(1) = Id$

$P(u) \circ Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k (Q(u))$ or $u^k(Q(u)) = \sum_{p \in \mathbb{N}} b_p u^{k+p}$, $P(u) \circ Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} a_k b_p u^{k+p}$

On pose alors $c_n = \sum_{p+k=n} a_k b_p \Rightarrow P(u) \circ Q(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u^n = PQ(u) = QP(u)$

$P(u) \circ Q(u)$ correspond au produit de Cauchy des deux séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k$ qui convergent

absolument $\varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q) = \varphi_u(PQ)$

On a donc : $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = PQ(u)$

Exemple :

$$P(x) = 1 - x + x^2 \text{ et } Q(x) = 3 - 2x$$

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) - u \circ Q(u) + u^2 \circ Q(u) = 3Id - 2u - 3u + 2u^2 + 3u^2 - 2u^3$$

$$Q(u) \circ P(u) = 3P(u) - 2u \circ P(u) = 3Id - 3u + 3u^2 - 2u + 2u^2 - 2u^3$$

Def : Son image sera notée $K[u]$ est une algèbre commutative, c'est une sous algèbre de $\ell(E)$.

Prop : $\text{Im } P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u

Par analogie, on définit également sur $M_n(K)$ on a $\varphi_M : K[X] \rightarrow M_n(K)$, $P \mapsto P(M)$

Son image $K[M]$ étant une sous algèbre de $M_n(K)$

2°) Polynôme minimal :

$\ker \varphi_u = \{P \in K[X], P(u) = 0\}$, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $K[X]$

Or $K[X]$ est principal, donc $\ker \varphi_u$ est soit réduit au polynôme nul, soit engendré par un polynôme particulier.

Def : Si $\ker \varphi_u \neq \{0\}$, le polynôme unitaire qui engendre $\ker \varphi_u$ est le polynôme minimal de u , que nous noterons $\min_u$ ou π_u

Prop : $P = \min_u$ si et seulement si $\begin{cases} P(u) = 0 \\ Q(u) = 0 \Rightarrow P \text{ divise } Q \\ \text{coefficient dominant de } P = 1 \end{cases}$

Ex : Si $u = \lambda Id$ alors son polynôme minimal est $X - \lambda$

Si u est un projecteur de E non nul et différent de l'identité alors $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de u , il est de degré minimal. C'est le polynôme minimal

De même si u est une symétrie alors $\min_u(x) = x^2 - 1$

Exo : Déterminer le polynôme minimal d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Rem : La dérivation sur $K[X]$, $P \mapsto P'$ n'admet pas de polynôme minimal

Dem : Soit D l'application telle que $D(P) = P'$ s'il existe un polynôme Q tel que $Q(D)(P) = 0$, $\forall P \in K[X]$

On pose $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ où $a_n \neq 0$, prenons le polynôme $P(x) = x^n$, on a $D^n(P) = n!$

Or $Q(D)(P) = 0$ alors $a_n n! = 0$ ce qui est impossible

Prop : Si u admet un polynôme minimal de degré d alors $(u^k)_{k=0..d-1}$ forme une base de $K[u]$

Dem : Montrons que la famille est libre, si elle était liée, alors il existerait $(a_i)_{i=0..d-1}$ telle que

$\sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k = 0 \Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$ serait annulateur de u de degré inférieur à d , ce qui contredit la définition du polynôme minimal

Le polynôme minimal étant de degré d , $u^d = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k$, on montre ensuite par récurrence que pour tout entier n supérieur à d , u^n est combinaison linéaire des $(u^k)_{k=0..d-1}$

Exo : Soit P un polynôme, montrer que si P et $\min_u$ sont premiers entre eux alors $P(u) \in GL(E)$

Exo : Soit $u \in \ell(E)$ tel que $\min_u(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Montrer que $\text{Im } u$ et $\ker u$ sont supplémentaires

3°) Théorème de décomposition des noyaux :

Th : Soient P_1 et P_2 deux polynômes premiers entre eux, on pose $P = P_1 \times P_2$

On a alors $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$

Dem : On a $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$

Soit $x \in \ker P_1(u) + \ker P_2(u) \Rightarrow x = x_1 + x_2$

$P(u)(x) = P_2(u) \circ P_1(u)(x_1) + P_1(u) \circ P_2(u)(x_2) = 0$ donc $\ker P_1(u) + \ker P_2(u) \subset \ker P(u)$

Soit $x \in \ker P(u)$, or $P_1 \wedge P_2 = 1$, donc il existe deux polynômes Q et R tels que

$P_1 Q + P_2 R = 1 \Rightarrow P_1(u) \circ Q(u) + P_2(u) \circ R(u) = Id$

Ainsi $x = P_1(u) \circ Q(u)(x) + P_2(u) \circ R(u)(x) = y + z$

$P_2(u)(y) = Q(u) \circ P(u)(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker P_2(u)$ $P_1(u)(z) = R(u) \circ P(u)(x) = 0 \Rightarrow z \in \ker P_1(u)$ donc

$\ker P(u) \subset \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$

Soit $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$, on réutilise le théorème de Bezout

$x = Q(u) \circ P_1(u)(x) + R(u) \circ P_2(u)(x) = 0 + 0$

Généralisation :

Si $(P_k)_{k=1}^n$ sont n polynômes premiers entre eux avec $P = \prod_{k=1}^n P_k$, alors $\ker P(u) = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \ker P_k(u)$

Un cas particulier intéressant :

Soient $(P_k)_{k=1}^n$ n polynômes premiers entre eux tels que $\prod_{k=1}^n P_k(u) = 0$

On a alors $E = \bigoplus_{k \in [1, n]} \ker P_k(u)$

4°) Applications :

- Supposons E un espace de dimension finie, si u un endomorphisme de E admet donc un polynôme minimal $\min_u$, ce polynôme se décompose en produit de facteurs premiers sous la forme $\min_u = \prod_{i=1}^p P_i^{\alpha_i}$, comme $\min_u(u) = 0$, on obtient $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \ker P_i^{\alpha_i}(u)$, cette somme directe étant constituée de sous espaces stables par u , dans une base bien adaptée, la matrice de u sera diagonale par bloc.

Def : Si $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ alors $\ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ s'appelle un espace caractéristique de u associé à λ_i

Ex : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(A - 2I) \oplus \ker(A - 4I)^2$. En déduire une

matrice diagonale par blocs semblable à A

- Etude de suites récurrentes

Soit Γ l'ensemble des suites (x_n) telles que $x_{n+4} = -2x_{n+3} + 11x_{n+2} + 12x_{n+1} - 36x_n$, cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 4.

Soit u l'endomorphisme de l'espace des suites tel que $u(x_n) = x_{n+1}$

$\Gamma = \ker P(u)$ où $P(u) = u^4 + 2u^3 - 11u^2 - 12u + 36Id$, or $P(u) = (u + 3Id)^2 \circ (u - 2Id)^2$

D'après le théorème de décomposition des noyaux $\Gamma = \ker(u + 3Id)^2 \oplus \ker(u - 2Id)^2$

Donc $x_n = y_n + z_n$, $y_n \in \ker(u + 3Id)^2$, $z_n \in \ker(u - 2Id)^2$

Or $\ker(u + 3Id)^2$ est de dimension 2 et $\ker(u + 3Id)^2 = \text{Vect} \left[(-3)^n, n(-3)^n \right]$

De même $\ker(u - 2Id)^2 = \text{Vect} \left[(2)^n, n(2)^n \right]$

Finalement $x_n = (-3)^n (a + bn) + 2^n (c + dn)$ pour tout entier naturel n

III) Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée :

1°) Définitions :

Prop : Soit $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ alors $\forall y \in \text{Vect}(x)$, $u(y) = \lambda y$

Dem : si $y \in \text{Vect}(x) \Rightarrow y = \alpha x \Rightarrow u(y) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x = \lambda y$

Conséquence : Une droite vectorielle D est stable par un endomorphisme u si et seulement si l'image d'un vecteur non nul de D appartient à D .

Def : Soit u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$, ce scalaire est une valeur propre de u si et seulement si il existe x un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$

Si λ est valeur propre de u , alors tout vecteur non nul vérifiant $u(x) = \lambda x$, est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ

Si x est vecteur propre, tout vecteur non nul de $\text{Vect}(x)$ sera aussi vecteur propre

L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre est un sous espace vectoriel de E si on lui adjoint 0 , on l'appelle sous espace propre de u noté $E_\lambda(u)$

L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u

Ex : Si u est un endomorphisme non injectif, alors 0 est valeur propre et l'espace propre associé est le noyau de u

Plus généralement on a $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id})$

Ex : Si u est la rotation du plan vectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$, si $\lambda \in \text{Sp}(u) \Rightarrow \langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$, 0 est donc la seule valeur propre, cependant u est bijectif donc $\text{Sp}(u) = \emptyset$

Si u est la dérivation sur l'ensemble des polynômes, 0 est valeur propre et son espace propre associé est l'ensemble des polynômes constants

Exo : Rechercher les éléments propres de la matrice A telle que :

$$a_{1,j} = a_{j,1} = a_{i,i} = 1 \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq 1, j \neq 1 \text{ et } i \neq j$$

2°) Quelques propriétés relatives aux espaces propres :

Prop: Tout sous espace propre d'un endomorphisme u est stable par u

Prop : Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors tout sous espace propre de l'un est stable par l'autre

Dem : Soit $x \in \ker(u - \lambda \text{Id}) \Rightarrow u(x) = \lambda x$ alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) \Rightarrow v(x) \in \ker(u - \lambda \text{Id})$$

Prop : Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme u , P un polynôme, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$

Prop : Si P est un polynôme annulateur de u alors les valeurs propres de u sont racines de P

Exo : Déterminer le spectre d'un projecteur

Th : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes 2 à 2, alors les sous espaces propres associés sont en somme directe

Dem : On note $E_i = \ker(u - \lambda_i \text{Id})$, et on effectue une récurrence sur p

$$p=2 : x \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

On suppose que $E_i \cap \left(\sum_{k=1}^{i-1} E_k \right) = \{0\}$

Soit $x \in E_{i+1} \cap \left(\sum_{k=1}^i E_k \right) \Rightarrow u(x) = \lambda_{i+1}x$ et $x = \sum_{k=1}^i x_k$

Donc $\lambda_{i+1} \sum_{k=1}^i x_k = \sum_{k=1}^i \lambda_k x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^i (\lambda_{i+1} - \lambda_k) x_k = 0$

Or la somme $(E_k)_{k=1..i}$ est directe $\forall k \in \llbracket 1, i \rrbracket \quad x_k = 0 \Rightarrow x = 0$

Conséquence : Si $x_1, \dots, x_p$ sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre

Ex : $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille (f_α) forme des vecteurs propres pour la valeur propre α , pour l'opérateur de dérivation, cette famille est donc libre

3°) Polynôme caractéristique en dimension finie :

Soit $\lambda \in K$, u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie sur K
 $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow u - \lambda \text{Id}$ n'est pas injectif, ce qui signifie que $\det(u - \lambda \text{Id}) = 0$

Def : On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u(X) = \det(X \text{Id} - u)$

Th : Les valeurs de u sont les racines du polynôme caractéristique de u

Si A est la matrice de u dans une base B de E , le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Rem importante : Cette définition est indépendante de la base de E choisie

Prop : Si u est un endomorphisme de E alors $\chi_u(X) = X^n - \text{Tr}u X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$

Ex : si $n = 2$ $\chi_u(X) = X^2 - \text{Tr}u X + \det u$

Dem : $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)}$ où $B = X I_n - A$ on a $b_{ii} = X - a_{ii}$ et $b_{ij} = -a_{ij}$ si $i \neq j$

Soit $\sigma_0 \in S_n$ telle que $\sigma_0(i) = i, \forall i$

Alors $\chi_A(x) = \det(B) = \prod_{i=1}^n (x - a_{ii}) + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)}$

Or si $\sigma \neq \sigma_0$ il existe au moins 2 indices j et k tels que $\sigma(j) \neq j, \sigma(k) \neq k$

Donc $d^\circ \left(\sum_{\sigma \neq \sigma_0} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)} \right) \leq n - 2$. $\chi_u(x) = x^n - \text{Tr}u \cdot x^{n-1} + P_{n-2}(x)$ et $\chi_u(0) = \det(-A) = (-1)^n \det u$

Th : Si le polynôme caractéristique est scindé sur K $\chi_u(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$

alors $\text{Tr} u = \sum_{k=1}^p m(\lambda_k) \lambda_k$ et $\det u = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{m(\lambda_k)}$

Cas particulier :

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - t_{ii})$

Conséquence :

Si E est de dimension n sur K , alors tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres

Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , alors tout endomorphisme de E admet au moins une valeur propre

Prop : Soit v l'endomorphisme induit de u sur un sous espace stable par u , alors le polynôme caractéristique de v est un diviseur du polynôme caractéristique de u

Dem : Si F est stable alors v est un endomorphisme de F , $\dim F = p$ et $(e_i)_{i=1..p}$ est une base de F , c'est une famille libre de E que l'on prolonge en une base de E , dans cette base la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \text{ où } B = \text{mat}(v, (e_i)_{i=1..p}).$$

$$\text{Alors } \chi_u(x) = \det \begin{bmatrix} xI_p - B & -C \\ 0 & xI_{n-p} - D \end{bmatrix} = \chi_v(x) R(x)$$

Prop : Soit E un espace vectoriel de dimension n , u un endomorphisme de E , et λ une valeur propre de u , si m est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique ; on a $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$

Dem : E_λ est stable par u , or la restriction v de u à E_λ est une homothétie

$$\text{Or } \chi_v(x) = (x - \lambda)^{\dim E_\lambda} \text{ divise } \chi_u$$

Conséquence : Si λ est racine simple du polynôme caractéristique alors $\dim E_\lambda = 1$

4°) Etude matricielle :

On dit que λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si λ est valeur propre de l'endomorphisme u associé à A

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda \text{Id}) = 0 \Leftrightarrow \exists X \neq 0, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AX = \lambda X$$

$$\text{Eox : Déterminer les éléments propres des matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Prop : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et donc ont les mêmes valeurs propres. Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique

5°) Th de Cayley-Hamilton :

Th : (Cayley Arthur 1821-1895, Hamilton William 1805-1865)

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u

On a donc pour toute matrice A : $\chi_A(A) = 0$

Dem : Montrons que $\forall x \in E, \chi_u(u)(x) = 0$, immédiat pour $x = 0$, on pose alors $x \neq 0$

Soit $I = \left\{ p \in \mathbb{N}, (u^k(x))_{k=0..p} \text{ soit libre} \right\}$ c'est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc I possède un plus grand élément s

Soit $E(x) = \text{Vect}\left((u^k(x))_{k=0..s}\right)$, la famille $(u^k(x))_{k=0..s+1}$ est liée

Donc $u^{s+1}(x) = \sum_{k=0}^s a_k u^k(x)$, ainsi $E(x)$ est stable par u

On considère alors $v = u|_E(x)$, χ_v divise χ_u

Soit B la matrice de v dans la base $(u^k(x))_{k=0..s}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & a_1 \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & a_s \end{bmatrix}, \chi_v(X) = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -a_0 \\ -1 & X & & -a_1 \\ 0 & -1 & & \\ & & X & \\ 0 & 0 & -1 & X - a_s \end{bmatrix}$$

On remplace la ligne $L_1 \leftarrow \sum_{k=0}^s X^k L_{k+1}$ $[0, 0, 0, \dots, 0, R(X)]$

$$D'où \chi_v(x) = (-1)^{s+2} R(X) (-1)^s = \left[X^{s+1} - \sum_{k=0}^s a_k X^k \right] \Rightarrow \chi_v(u)(x) = R(u)(x) = 0$$

$$D'où \chi_u(u)(x) = Q(u) \circ \chi_v(u)(x) = 0$$

Th : Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur K , alors E est somme directe des sous espaces caractéristiques de u

$$\text{Dem : } \chi_u(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{\alpha_k} \Rightarrow E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \ker(u - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

Conséquences :

Le polynôme minimal est un polynôme diviseur du polynôme caractéristique existe toujours en dimension finie

Le degré du polynôme minimal est inférieur ou égal à la dimension de E

Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines avec des ordres différents

$$\text{Ex : Soit la matrice } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \chi_A(X) = (X - 2)^3; \min_A(X) = (X - 2)^2$$

$$\text{Exo : Déterminer le polynôme minimal de } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6°) Deux exemples en dimension infinie :

Exo1 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$, soit f l'endomorphisme de E tel que pour tout P de E

$$f(P)(X) = (X^3 + X)P'(X) - (3X^2 - 1)P(X)$$

Déterminer les éléments propres de f

Exo2 : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

u l'endomorphisme de E défini par $u(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u

IV) Diagonalisation en dimension finie :

1°) Endomorphisme diagonalisable :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale si et seulement si il existe une base constituée de vecteurs propres de u

Th : u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de u. On a alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(E - \lambda \text{Id})$$

Th : Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement la somme des dimensions des espaces propres de u est égale à la dimension de E

2°) Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable :

Th : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, on suppose que u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable

Th : Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K, et que pour toute valeur propre, l'espace propre associé est de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique

Dem : ($\Rightarrow$) Il existe une base de vecteurs propres, dans cette base la matrice de u est diagonale donc

$$\chi_u(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (x - \lambda)^{\dim E_\lambda}$$

$$(\Leftarrow) \chi_u(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (x - \lambda)^{m(\lambda)}, \text{ or } d^\circ(\chi_u) = n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda)$$

donc u est bien diagonalisable

Th : Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur K et n'admet que des racines simples (SARS)

Dem : ($\Rightarrow$) χ_u est scindé, on note $\text{Sp}(u) = \{(\lambda_i), i = 1..p\}$ et $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$ où

$m(\lambda) = \dim(E_\lambda)$. On considère le polynôme P défini par $P(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)$ ce polynôme divise le polynôme minimal car les racines de $\min_u$ sont les $(\lambda_i)_{i=1..p}$

Montrons que P est annulateur de u

Il existe une base β correspondant à $E = \bigoplus E_{\lambda_i}, \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^p x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^k P(u)(x_i) \text{ or } \forall i \in [1, p] \quad P(u)(x_i) = Q(u) \circ (u - \lambda_i \text{Id})(x_i) = 0$$

$$\text{Finalement } \min_u(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)$$

($\Leftarrow$) Nous savons que $\min_u(u)=0$, par le théorème de décomposition des noyaux on obtient immédiatement $E = \bigoplus \ker(u - \lambda_i \text{Id})$

Corollaire : u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé dont toutes les racines sont simples

Prop : Si u est diagonalisable alors si F est stable par u , l'endomorphisme de f induit par u est aussi diagonalisable

Ex : Une symétrie s vérifie $s \circ s = \text{Id}$ donc $X^2 - 1$ est annulateur scindé et ses racines sont simples

3°) Matrices diagonalisables :

Def : Une matrice A est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. L'endomorphisme qui lui est associé est donc diagonalisable

Diagonaliser une matrice revient à déterminer une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$

Ex : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, A n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{C}$

Exo : Diagonaliser sur $\mathbb{R}$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

V) Applications :

1°) Calcul de la puissance d'une matrice :

- Cas diagonalisable

On suppose que $A = PDP^{-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$

Exo : Calculer les puissance entières de $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Rem : Ceci permet entre autre de calculer l'exponentielle d'une matrice par la formule $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

- A l'aide du polynôme minimal ou caractéristique

On effectue la division euclidienne du polynôme X^n par $\min_A$

On obtient $X^n = \min_A(X)Q(X) + R(X)$ où $d^\circ(R) < \dim E$.

Soit finalement $A^n = R(A)$

Exo : Calculer les puissances entières de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exo2 : Déterminer les matrices X telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

6°) Un peu de probabilité

Exo : On étudie la population d'une région . Le 1^{er} janvier de l'année 0, 70% résidaient à la campagne et 30% en ville. On observe que l'effectif de la population reste constant, que chaque année 5% de ceux qui résident en ville décident de s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'habiter en ville. On note v_n et c_n le nombre d'habitants respectivement en ville et à la campagne à l'année n

Quelle sera la répartition de la population de cette région à long terme ?

7°) Un résultat de densité

Th : $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$

Dem : Soit M une matrice de $M_n(K)$, si M est inversible on pose la suite $M_k = M$ pour tout entier k , cette suite converge vers M

Sinon, si $Sp(M) = \{0\}$, on pose $\alpha = 1$, sinon $\alpha = \min(|\lambda|, \lambda \in Sp(M), \lambda \neq 0)$

On définit la suite $M_k = M - \frac{\alpha}{k+1} I_n$, ces matrices sont inversibles car $\frac{\alpha}{k+1} \notin Sp(M)$ et la suite converge vers M

VI) Trigonalisation d'endomorphisme :

1°) Définition :

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieure.

Autrement dit si A est la matrice de u , il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$

2°) C.N.S. de trigonalisation :

Th : u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé

Dem : ($\Rightarrow$) Assez immédiat car le polynôme caractéristique est indépendant de la base choisie, ainsi

dans la base qui trigonalise u on aura $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^n (x - t_{ii})$

($\Leftarrow$) On effectue un raisonnement par récurrence sur la dimension n de l'espace

Si $n=1$, la matrice de tout endomorphisme est triangulaire

On suppose que tout endomorphisme d'un espace de dimension $n-1$ dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

Soit λ une valeur propre, qui existe car χ_u est scindé, $\exists x_1 \neq 0$ tel que $u(x_1) = \lambda x_1$

On note β une base de F telle que $E = \text{Vect}(x_1) \oplus F$

$$\text{mat}(u, (x_1, \beta)) = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ 0 & a_{11} & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \\ 0 & a_{n-1,1} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Soit p la projection sur F parallèlement à $\text{Vect}(x_1)$ et $v = p|_F$ l'endomorphisme induit sur F , on aura alors $A = \text{mat}(v, \beta)$

On aura alors $\chi_u(x) = (x - \lambda)\chi_v(x) \Rightarrow \chi_v$ est scindé

Cependant v est un endomorphisme dans un espace de dimension $n-1$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence

Il existe donc une base β' qui trigonalise v dans F

Finalement la base (x_1, β') est une base dans laquelle la matrice de u sera bien triangulaire supérieure

Conséquence : Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

Th : u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé annulateur de u

3°) Méthode pratique de trigonalisation :

De manière générale on utilise la définition d'une matrice dans une base donnée et le théorème de décomposition des noyaux

Etude d'un exemple : $M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nous savons que $\mathbb{R}^4 = \ker(M - 2I)^2 \oplus \ker(M + 2I)^2$

On veut alors montrer que M est équivalente à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Pour cela, on construit la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \in \ker(M - 2I) \\ M\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \in \ker(M + 2I) \\ M\varepsilon_4 = \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4 \end{cases}$$

Rem : En fait il suffit de choisir

$$\varepsilon_2 \in \ker(M - 2I)^2 \setminus \ker(M - 2I)$$

$$\varepsilon_4 \in \ker(M + 2I)^2 \setminus \ker(M + 2I)$$

Exo : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4°) Le cas des endomorphismes nilpotents :

Def : Un endomorphisme u est nilpotent d'ordre p si et seulement si $u^p = 0$ et $\forall k < p, u^k \neq 0$

Exo : La somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente

Def : Une matrice A est nilpotente d'ordre p si et seulement si $A^p = 0$ et $\forall k < p, A^k \neq 0$

Th : Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable avec comme seule valeur propre 0

Dem : ($\Rightarrow$) Si u est nilpotent d'ordre p alors le polynôme $x \mapsto x^p$ est annulateur et scindé son polynôme minimal est nécessairement $\min_u(x) = x^p$ donc u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$

($\Leftarrow$) Si u est trigonalisable alors son polynôme minimal est scindé et ses racines sont les valeurs propres donc $\min_u(x) = x^p$, or $\min_u(u) = u^p = 0$

Conséquence : L'indice de nilpotence est toujours inférieur à la dimension de l'espace

Dem : Le polynôme minimal est un diviseur du polynôme caractéristique

$$d^\circ(\min_u) = p \leq n = d^\circ(\chi_u) = \dim(E)$$

5°) Retour aux applications :

- *Calcul de puissances de matrice : si $A = PTP^{-1}$ or $T = D + N$ où N est nilpotente donc $A^n = PT^nP^{-1}$ où T^n se calcule par le binôme de Newton si D et N commutent*

- *Sous espaces stables :*

Th : Si λ est valeur propre de u d'ordre p alors le sous-espace $\ker(u - \lambda \text{Id})^p$ est stable par u

- *Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants :*

La méthode est la même que dans le cas diagonalisable, on remplace simplement D par T