Saint Rémi : MP
David Corneillie

Chap AG2 : Exercices vus en classe ou à faire

Rappels préliminaires :

Exo1 :
Montrer que les trois fonctions $f : x \mapsto \sin x$, $g : x \mapsto \sin(x+a)$, $h : x \mapsto \cos(x+b)$ *sont liées*

Exo2 :
Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ *une famille linéairement indépendante*
La famille $(u_1 - u_2, u_2 - u_3, \ldots\ldots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$ *est-elle libre ou liée ?*
La famille $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \ldots\ldots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$ *est-elle libre ou liée ?*

Exo3 :
La famille des fonctions $(x \mapsto \sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est-elle libre ?*

Exo4 :
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - 3z - t = 0\}$. *Déterminer une base de E*

Exo5 :
Comment choisir $z = a + ib$, *pour que* $(z, \bar{z})$ *soit une base de* $\mathbb{C}$ *?*

Exo6 :
Une famille $B = (x_i)_{i \in I}$ *d'éléments de E, montrer l'équivalence entre les 3 propriétés*

(i) B est une famille libre et génératrice
(ii) B est une famille libre maximale ($\forall x,\ B \cup \{x\}$ *est liée)*
(iii) B est une famille génératrice minimale ($\forall j \in I,\ \dot{B} \setminus \{x_j\}$ *est non génératrice)*

Exo7 :
Soit $F = \{(x, y, -x, 2y), \text{avec } x \text{ et } y \text{ réels}\}, G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$
F et G sont ils supplémentaires ? de même pour F et H

Exo8 : *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *, soit* $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ ou } x - y - z = 0\}$
Déterminer $vect(H)$

Exo9 :
Soit $\mathbb{R}^n$ *muni de sa base canonique* $(e_i)_{1 \le i \le n}$. *Déterminer les formes linéaires* φ *sur* $\mathbb{R}^n$ *qui vérifient* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$

Exo10 :
E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes g de E. Montrer que pour tout u de E , $(u, f(u))$ *est liée*
En déduire que f est une homothétie vectorielle

Exo11 :
Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p + q = Id$
Montrer que $poq = qop = 0$
Montrer que $\operatorname{Im} p$ *et* $\operatorname{Im} q$ *sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.*

Exo12 :
Soit E un espace vectoriel, montrer que la somme de deux projecteurs p et q de E est un projecteur de E si et seulement si $poq = qop = 0$

Exo13 :
Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E

Soit g un endomorphisme de E tel que $pog = gop$, *montrer que* $\operatorname{Im} p$ *et* $\ker p$ *sont stables par* g.
Montrer que si $\operatorname{Im} p$ *et* $\ker p$ *sont stables par g alors* $pog = gop$.

<u>*Exo14 :*</u>

E un espace vectoriel et f une application linéaire de E

Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f^2 = \ker f$

<u>*Exo15 :*</u>

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id = 0$. *Montrer que E est la somme directe des sous espaces* $\ker(f - 2Id)$ *et* $\ker(f - 3Id)$

<u>*Exo16 :*</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ *et* $f^2 \neq 0$, *montrer que* $Vect(Id, f, f^2)$ *est l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .*

<u>*Exo17:*</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension n, f et g sont deux endomorphismes de E

Montrer que si $\forall x \in E,\ fog(x) = 0$ *alors* $\operatorname{Im} g \subset Kerf$ *puis que* $rg(f) + rg(g) \leq n$

Montrer que si $f + g$ *est bijectif alors* $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ *puis que* $rg(f) + rg(g) \geq n$

<u>*Exo18 :*</u>

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie

On note h la restriction de g à $\operatorname{Im} f$

Montrer que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} gof$ *et* $\ker h \subset \ker g$

Montrer que $\dim(\ker(gof)) \leq \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$

<u>*Exo19 :*</u>

Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension n

Montrer que $\operatorname{Im} u = \ker u \Leftrightarrow uou = 0$ *et* $n = 2\operatorname{rg}(u)$

<u>*Exo20 :*</u>

Soit E un $\mathbb{C}$ *espace vectoriel de dimension finie, pour a et b deux endomorphismes de E, on considère* $[a,b] = aob - boa$

Soient 3 éléments non nuls de $\ell(E)$ *notés e, f et h tels que*

$[e,h] = 2e,\ [f,h] = -2f,\ [e,f] = h$. *On considère* $\ell_3 = Vect(e, f, h)$

Prouver que $\dim \ell_3 = 3$

<u>*Exo21 :*</u>

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $gofog = g$ *et* $fogof = f$

Montrer que $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker g$ *sont supplémentaires*

Montrer que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$

<u>*Exo22 :*</u>

Soit a et b deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ *.On considère f tel que* $f(x) = \langle a, x \rangle b$

$\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$ *sont ils supplémentaires ?*

<u>*Exo23 :*</u>

Soit M une matrice carrée d'ordre 3, *de rang 2. Quelle est la dimension du noyau de la transposée de M*

<u>*Exo24 :*</u>

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Déterminer en fonction du rang de A , le rang de sa comatrice*

<u>*Exo25 :*</u>

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, *montrer l'équivalence*

(i) ${}^tMM = M\,{}^tM$

(ii) $\exists (S, A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$ *tel que* $M = A + S$ *et* $SA = AS$

Exo26 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

On considère f un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ *tel que* $f(M)=AM$

Déterminer le noyau de f . Préciser une base du noyau et de l'image de f

Exo27 :

Soit l'endomorphisme f défini par $:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x'=-x-3y+2z\\ y'=-x+y-2z\\ z'=-x+3y-4z\end{pmatrix}$

Préciser une base de l'image et du noyau de f

Exo28 :

Soit la matrice carrée d'ordre 3 *définie par* $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$

Montrer que A est inversible et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de A et I

Exo29 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}cha & sha\\ sha & cha\end{pmatrix}$*, calculer* A^n

Exo30 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$*, calculer* A^n *et* $\exp(A)$

Exo31 :

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ *et C de* $M_n(\mathbb{R})$

Déterminer les inverses des matrices $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$

Exo32 :

Déterminer X pour lesquels $D(X)=\begin{vmatrix}X & \sin\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin\alpha & X & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & X\end{vmatrix}=0$

Quelles sont les valeurs de α *pour lesquelles* $D(X)$ *admette une racine double ?*

Exo33:

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le déterminant suivant est nul.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-x-1 & -1 & 1 & 3\\ 1 & -x-1 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 3-x & 3\\ 1 & 1 & 1 & -x-1\end{vmatrix}\quad et\quad \Delta=\begin{vmatrix}-x-1 & -4 & -2 & -2\\ -4 & -x-1 & -2 & -2\\ 2 & 2 & 1-x & 4\\ 2 & 2 & 4 & 1-x\end{vmatrix}$$

Exo34 :

Soit $A_n=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ *pour* $n\geq 1$*. Calculer* D_n *le déterminant de* A_n *en fonction de n*

(on pourra exprimer D_{n+2} *en fonction de* D_{n+1} *et* D_n *)*

Exo35 :

Soit x un réel non nul, A une matrice carrée d'ordre n. Montrer que les matrices A et $A+xI_n$ *ne sont pas semblables.*

Exo36 :

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, et $B=\{1,X,X^2\}$ *sa base canonique. On considère 3 réels* $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$

Déterminer la famille de polynômes de E tels que $L_i(a_j)=\delta_{ij}$

Montrer que cette famille forme une base

Quelles sont les composantes d'un polynôme P de E dans cette base ?

Exo37 :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Soit u l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P de E fait correspondre le polynôme $u(P)$ *tel que* $u(P)(x)=P(x+1)-P(x)$

On considère la matrice suivante $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Déterminer la base (p_1,p_2,p_3,p_4) *de E dans laquelle la matrice de u serait A.*

Exo38 :

Montrer qu'une matrice M carrée d'ordre n est de rang 1 *si et seulement si il existe deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$, *X et Y tels que* $M=X\,{}^tY$

Exo39 :

Soient A et B deux vecteurs linéairement indépendant, on pose $M=A\,{}^tB+B\,{}^tA$. *Déterminer le rang de M*

Exo40 :

Soit B une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps des complexes

Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$ *l'équation* $M+{}^tM=tr(M)B$

Exo41 :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ *de dimension finie, G un sous groupe fini de* $GL(E)$. *On pose* $f=\sum_{g\in G} g$.

Montrer que $f^2=card(G)\,f$, *en déduire que* $tr(f)=0\Rightarrow f=0$

Exo42 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$

Montrer que A est la matrice d'une projection. Préciser son rang

Déterminer une base des sous espaces F et G de $\mathbb{R}^3$ *tels que A soit la matrice de la projection de F parallèlement à G*

Exo43 :

On note dans $\mathbb{R}^3$, *le plan P d'équation* $x+y+z=0$ *et D la droite d'équations* $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de p la projection sur P parallèlement à D

Exo44 :

Soit $e_1(1,1)$ *et* $e_2(1,3)$ *de* $\mathbb{R}^2$, *on considère F la droite engendrée par* e_1, *et G la droite engendrée par* e_2, *déterminer la matrice de la projection sur F parallèlement à G relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}^2$

Exo45 :

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$*, montrer que A est diviseur de 0 si et seulement si A n'est pas inversible*

Exo46 :

$A\in M_n(\mathbb{R})$*, on considère f un endomorphisme de* $M_n(\mathbb{R})$ *tel que* $f(M)=AM$

Montrer que f est bijective si et seulement si A est inversible

Exo47 :

Pour tout réel a *non nul, on considère les matrices* $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $(A+I)(2I-A)$.

Montrer que A *est inversible et Préciser l'inverse de* A.

On pose $B=\frac{1}{3}(A+I)$ *et* $C=\frac{1}{3}(2I-A)$. *Montrer que pour tout entier naturel* n, $A^n=2^nB+(-1)^nC$.

Exo48 :

Soit (n,p) *deux entiers tels que* $n<p$, $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B\in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Calculer $\det(BA)$

Exo49 :

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang* $r<n$. *On pose* $G=\{B\in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $ABA=0\}$

Montrer que G est un espace vectoriel dont vous préciserez la dimension

Exo50 :

Soient deux matrices A et B appartenant à $M_3(\mathbb{R})$ *telles que* $AB=0$

Montrer qu'au moins l'une de deux matrices est de rang inférieur ou égal à 1

Exo51 :

Si deux matrices A et B carrées d'ordre n à coefficients réels sont semblables sur $\mathbb{C}$ *alors elles le sont sur* $\mathbb{R}$

Exo52 :

Montrer que les matrices suivantes sont semblables $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exo53 :

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*, montrer que ces deux matrices sont semblables*

Exo54 :

Soit A une matrice carrée d'ordre 3n à coefficients dans $\mathbb{R}$ *telle que* $A^3=0$ *et* $Rang(A)=2n$. *On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que* $\operatorname{Im} f^2=\ker f$

Prouver que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exo55 :

Soit $n\geq 2$ *, A une matrice de* $M_n(\mathbb{R})$*, telle que* $\forall X\in M_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X)=\det A+\det X$

Montrer que A n'est pas inversible. Puis montrer que A est la matrice nulle

Exo56 :

Soit $A\in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3=0$ *et* $A^2\neq 0$*, montrer que A est semblable à* $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

Exo57 :

Soient a et b deux réels non nuls, montrer que $\begin{pmatrix}\lambda&a\\0&\lambda\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\lambda&b\\0&\lambda\end{pmatrix}$ *sont semblables*

I) Sous espaces stables

Exo58 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$*, montrer que l'endomorphisme associé à A stabilise* $E_1=\ker(A+I), E_2=\ker(A+I)^2, E_3=\ker(A+I)^3$

En déduire que A est semblable à T *triangulaire supérieure que l'on déterminera*

Exo59 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme nilpotent d'ordre p

Montrer qu'il existe $(F_i)_{i=1}^{p}$ *telle que* $E=\underset{i=1..p}{\oplus}F_i$

II) Polynômes d'endomorphisme :

Exo60 :

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension n

Etablir l'existence d'un entier k tel que $\ker u^k=\ker u^{k+1}$

Montrer alors que pour tout entier p supérieur à k, on a $\ker u^p=\ker u^k$

Exo60 :

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2-5f+6Id=0$*. Montrer que E est la somme directe des sous espaces* $\ker(f-2Id)$ *et* $\ker(f-3Id)$

Exo62:

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}$*, montrer que* $\mathbb{R}^3=\ker(A-2I)\oplus\ker(A-4I)^2$.

En déduire une matrice triangulaire semblable à A

Exo63 :

Soit A de $M_2(\mathbb{R})$*, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, vérifiant* $P(A)=A^2+A+I_2=0$*, on désigne par f l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *associé à A.*

Montrer que pour toute matrice A de G, il existe une matrice inversible telle que $A=QTQ^{-1}$*, avec* $T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

Exo64 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E supposé de dimension infinie tels que $uov-vou=Id$*. Montrer que u n'admet pas de polynôme minimal*

Exo65 :

Soit u un endomorphisme d'une espace vectoriel E de dimension n

On suppose que $u^3 - 3u^2 + u = 0$

Montrer que $\operatorname{Im} u$ *et* $\ker u$ *sont supplémentaires*

Exo66 :

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E

Soit P un polynôme annulateur de u tel que $P(0) = 0$ *et* $P'(0) \neq 0$

Montrer que $\operatorname{Im} u$ *et* $Keru$ *sont supplémentaires*

Exo67 :

On note L_u *l'application qui à tout endomorphisme v de E associe l'endomorphisme* $[u,v] = uov - vou$.

Montrer que L_u *est nilpotent*

Exo68 :

Soit u un endomorphisme admettant un polynôme minimal, et P un polynôme. Montrer que $P(u)$ *et inversible si et seulement si* P *et* $\min_u$ *sont premiers entre eux*

Exo69 :

Soit E un $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que* $f^2 - f - 2Id = 0$

Montrer que $\operatorname{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$

III) Eléments propres :

Exo70 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ *, on définit les applications de* $M_n(\mathbb{C})$ *dans lui-même par :*

$\Phi_A(M) = AM$ *et* $\Psi_A(M) = MA, \forall M \in M_n(\mathbb{C})$

Comparer le spectre de A et celui de Φ_A*. Que dire du spectre de* Ψ_A *?*

Exo71 :

Rechercher les éléments propres de la matrice A telle que :

$a_{1,j} = a_{j,1} = a_{i,i} = 1$ *et* $a_{i,j} = 0$ *si* $i \neq 1$ *,* $j \neq 1$ *et* $i \neq j$

Exo72 :

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exo73 :

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exo74 :

$$f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de f

Exo75 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$

u l'endomorphisme de E défini par $u(f)(x)=\int_0^1 \inf(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u

Exo76 :

Déterminer le polynôme minimal de $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$

Exo77 :

Soit E un $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E vérifiant* $u^3=-u$

Montrer que le rang de u est pair

Exo78 :

Soient $(A,B)\in\left(M_n(\mathbb{C})\right)^2$ *, on note* $Sp(A)$ *le spectre de A*

Montrer que $\chi_A(B)\in GL_n(\mathbb{C})\Leftrightarrow Sp(A)\cap Sp(B)=\varnothing$

Exo79 :

Soit $E=\mathbb{R}[X]$*, soit f l'endomorphisme de E tel que pour tout P de E*

$f(P)(x)=\left(x^3+x\right)P'(x)-\left(3x^2-1\right)P(x)$

Déterminer les éléments propres de f

Exo80 :

Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *, pour tout suite u de E, on pose* $f(u)=v$ *telle que*

$v_0=u_0$ *et* $\forall n>0,\ v_n=\dfrac{u_n+u_{n-1}}{2}$

Déterminer les éléments propres de f

IV) V) Diagonalisation et applications

Exo 81 :

Soit la matrice A donnée par $A=\begin{pmatrix}3&-3&2\\-1&5&-2\\-1&3&0\end{pmatrix}$ *, A est-elle diagonalisable ? Calculer* A^n

Exo82 :

Soit la matrice A donnée par $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ *, A est-elle diagonalisable ? Calculer* A^n

Exo83 :

Discuter suivant les valeurs de a si la matrice $A(a)$ *est diagonalisable (* $a\neq k\pi$ *)*

$$A(a)=\begin{pmatrix}0&\sin(a)&\sin(2a)\\\sin(a)&0&\sin(2a)\\\sin(2a)&\sin(a)&0\end{pmatrix}$$

Exo84 :

Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases}x'(t)=y(t)+2z(t)\\y'(t)=-x(t)-2z(t)\\z'(t)=x(t)-y(t)\end{cases}$

Exo85 :

Soit A_n *une matrice carrée d'ordre n telle que* $a_{i,j}=1$ *si* $i\neq j$ *et* $a_{i,i}=0$

Déterminer les valeurs propres de A_n ainsi que leur ordre de multiplicité . Quel est le polynôme caractéristique de A_n ?

Exo86:

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Exo87 :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$. *Exprimer* u_n *en fonction de n, a, b et c*

Exo88 :

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, *puis calculer* A^n

Exo89 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calculer* A^n *en fonction de A et* I_3

Exo90 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où* $a \in \mathbb{R}$

Discuter suivant les valeurs de a si A est diagonalisable

Exo91 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Pour tout entier $n \geq 2$, *exprimer* A^n *en fonction de A et* I_3

Exo92 :

Déterminer ses éléments propres de la matrice carrée d'ordre 2n définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & a & b & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ a & & & & & b \end{pmatrix}$$

Exo93 :

Soit la matrice A carrée d'ordre n définie par $a_{ij} = ij^2$. *A est-elle diagonalisable ?*

Exo94 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^4 + 5A^2 + 4I_n = 0$. *Montrer que la trace de A est nulle*

Exo95 :

Déterminer les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exo96 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps des réels

On suppose que A vérifie : $A^2 + A + I_n = 0$

Déterminer la trace et le déterminant de A

Exo97 :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $(e_i)_{i=1}^{n}$ *une base de E*

V un élément de E . On considère f un endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = V$

f est-il diagonalisable ?

Exo98 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ *telle que* $A^3 = I_n$. *Montrer que A est diagonalisable*

Exo99 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$. *Déterminer les éléments propres de B*

Exo100:

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $M \in M_{3n}(\mathbb{R})$ *telles que* $M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable

Exo101 :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer $C(A)$ *l'ensemble des matrices qui commutent avec A*

Exo102 :

Déterminer les matrices X telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \\ -5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

Exo103 :

On étudie la population d'une région. Le 1^{er} *janvier de l'année 0, cette région comptait 250000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.*

On observe que l'effectif de la population reste constant, que chaque année 5% de ceux qui résident en ville décident de s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'habiter en ville.

On note v_n *et* c_n *le nombre d'habitants respectivement en ville et à la campagne à l'année n*

Quelle sera la répartition de la population de cette région à long terme ?

Exo104 :

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$, $x^3 - 2x + 1 = 0$ *et* $x^3 - 2x - 4 = 0$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, *montrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D, que l'on précisera, telle que* $A = PDP^{-1}$

Déterminer les matrices M qui commutent avec D

En déduire que toute matrice qui commute avec A est de la forme PYP^{-1} *où Y est une matrice diagonale.*
Déterminer les matrices diagonales Y qui vérifient l'équation $Y^3 - 2Y = \frac{1}{2}D$
Montrer que si une matrice X est solution de (E) : $X^3 - 2X = \frac{1}{2}A$ *alors* $XA = AX$ *. Résoudre (E)*

<u>Exo105 :</u>

Résoudre l'équation $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Exo106 :</u>

Soient $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telles que* $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable de deux manières différentes

<u>Exo107 :</u>

Trouver les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

<u>Exo108 :</u>

Les deux matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

<u>Exo109 :</u>

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On définit maintenant φ *sur E qui a tout polynôme de E fait correspondre le polynôme* $\varphi(P)$ *tel que* $\varphi(P)(x) = (2x-1)P(x) - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)P'(x)$

a. *Montrer que* φ *est un endomorphisme de E*
b. *Montrer que –1 est valeur propre de* φ *et préciser les vecteurs propres associés.*
c. *Est-ce que* φ *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? L'est il sur* $\mathbb{C}$ *?*
d. *On note Q le polynôme image du monôme X par* φ*. Exprimer le polynôme* $\varphi(Q)$ *en fonction de Q et de X , en déduire l'existence d'un plan stable par* φ *que l'on précisera.*
e. *Montrer qu'il existe une base de E telle que u soit représenté matriciellement par* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

<u>Exo110 :</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage et déterminer explicitement cette matrice de passage
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.
Montrer qu'il existe une base de E telle que les matrices de u et v dans cette base soit diagonale

<u>Exo111 :</u>

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ *de degré inférieur ou égal à n.*
On pose $\forall P \in E,\ f(P)(x) = P(x) - P'(x)$

Démonter que f est bijectif de deux manières différentes :

a. *sans utiliser de matrice de f*
b. *en utilisant une matrice de f*

Soit $Q \in E$ *, trouver en fonction de Q le polynôme P tel que* $f(P)(x) = Q(x)$ *(on pourra utiliser* $P^{(n+1)}$ *)*

f est-il diagonalisable ?

Exo112 :

Soit A une matrice diagonalisable, on note Q le polynôme dérivé de son polynôme minimal

Montrer que $\det(Q(A)) \neq 0$

VI) Trigonalisation :

Exo113 :

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *et que* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exo114 :

On considère la matrice M= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *. Trigonaliser M*

Exo115:

Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 8 & 0 \\ -11 & 5 & 14 & 12 \\ -6 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

Construire une matrice P inversible d'ordre 4 telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}$ *où* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exo116 :

Trigonaliser $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & 2 & 1 \\ -17 & -8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo117 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$*, déterminer* $\det(\exp(A))$

Exo118 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, déterminer les endomorphismes f de E tels que $\operatorname{Im} f^2 = \ker f$

Exo119 :

Soit la matrice $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 5 & 0 \\ -10 & y & 0 \\ -13 & 14 & -3 \end{pmatrix}$ *, déterminer les valeurs propres de* $A_{x,y}$ *sachant que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est vecteur propre. Puis montrer que* $A_{x,y}$ *est semblable à* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$