Saint Rémi : MP (programme 2022)
David Corneillie

Chap AG3 :
Endomorphismes d'un espace euclidien

Exemple : Soit A la matrice suivante $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et* $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *alors* $X^T AY = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 - 2x_2y_3 + 3x_3y_1 - 2x_3y_2 + x_3y_3$

Rappels préliminaires

1°) Produit scalaire :

Def : Un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire, symétrique, définie positive est appelé espace préhilbertien réel, s'il est de plus de dimension finie, il est euclidien.
La forme associée est aussi appelée un produit scalaire, que l'on note souvent :

$$f(x,y) = (x|y) = \langle x, y\rangle$$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.

Ex : $E=\mathbb{R}^n$ *et* $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$E = M_n(\mathbb{R})$ *et* $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$

$E = C([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

Th et def : Si E est un espace préhilbertien réel et $\langle\ ,\ \rangle$ *son produit scalaire, on définit alors* $\forall x\in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ *, qui est une norme sur E appelée la norme euclidienne.*
Si de plus E est de dimension finie, on dit que l'espace E est euclidien

Ex : $E=\mathbb{R}^n$ *et* $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$E = M_n(\mathbb{R})$ *et* $\|A\|^2 = \mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ *et* $E = C([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$

Rappel : Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ *on note* $\|A\| = \sqrt{tr\left(A^T A\right)}$. *Montrer que* $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

Prop : On a alors les relations suivantes

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle,\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \quad (\textit{ identité du } \square\ )$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

$$\left|\langle x,y\rangle\right| \le \|x\|\|y\|$$

Dem : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x-y\rangle-\langle y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$

On additionne les deux premiers résultats pour retrouver le troisième
On soustrait les deux premiers résultats pour trouver le quatrième

Exo : *Soient u et v deux endomorphismes d'un espace préhilbertien E de dimension n*
Montrer que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes
(i) $\forall(x,y)\in E^2\ \langle u(x),u(y)\rangle=\langle v(x),v(y)\rangle$
(ii) $\forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|v(y)\|$

<u>*2°) Espace vectoriel euclidien :*</u>

Def : Une famille $(e_1,....,e_n)$ *est orthogonale lorsque* $\langle e_i,e_j\rangle=0$ *si* $i\neq j$ *.*
Elle est orthonormale lorsque $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$
Th : Si $(e_i)_{i=1..n}$ *est une base orthonormale de E alors* $\langle x,y\rangle=X^TY$ *où X et Y sont les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont respectivement celles de x et y . De même on aura* $\|x\|^2=X^TX$

Th : Soient p un entier et $(e_1,....,e_p)$ *une famille libre de E, il existe une famille* $(f_1,....,f_p)$ *orthonormale de E telle que* $Vect(e_1,....,e_k)=Vect(f_1,....,f_k),\ \forall k\le p$

Dem : On pose $f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$*, ainsi* f_1 *est normé et* $Vect(f_1)=Vect(e_1)$
On définit alors $\varepsilon_2=e_2-\langle e_2,f_1\rangle f_1$ *ainsi* $\langle\varepsilon_2,f_1\rangle=0$
Si $\varepsilon_2=0$ *alors* (e_1,e_2) *est liée, donc* $\varepsilon_2\neq0$*, on pose alors* $f_2=\frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}$
On obtient ainsi une famille (f_1,f_2) *orthonormale telle que* $Vect(f_1,f_2)\subset Vect(e_1,e_2)$
Or si $f_2=kf_1$ *alors* $\langle f_1,f_2\rangle=0=k\|f_1\|^2$ *ce qui est impossible donc* (f_1,f_2) *est libre*
Et finalement $Vect(f_1,f_2)=Vect(e_1,e_2)$
On suppose ensuite que $(f_i)_{i=1..k}$ *est orthonormale et* $Vect(e_1,....,e_k)=Vect(f_1,....,f_k)$
On construit $\varepsilon_{k+1}=e_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1},f_i\rangle f_i$ *, ainsi* $\forall j,\ \langle\varepsilon_{k+1},f_j\rangle=\langle e_{k+1},f_j\rangle-\langle e_{k+1},f_j\rangle=0$
Or $\varepsilon_{k+1}\neq0$ *car sinon* $(e_i)_{i=1}^{k+1}$ *serait liée, donc on pose* $f_{k+1}=\frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|}$
Ainsi la famille $(f_i)_{i=1..k+1}$ *est orthonormale et* $Vect(e_1,....,e_{k+1})=Vect(f_1,....,f_{k+1})$

Dans cette démonstration on utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
(Gram Jorgen 1850-1916 , Schmidt Erhard 1876-1959)
Si $(e_i)_{i=1..n}$ *forme une base de E on pose* $f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$ *puis* $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \varepsilon_{k+1}=e_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1},f_i\rangle f_i$

Et enfin $f_{k+1}=\frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|}$

Corollaire : Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales, le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.
Exo : Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$
Exo : Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ *une base orthonormale de l'hyperplan d'équation* $x+y+z+t=0$

3°) *Sous espace orthogonal :*

Def : x est orthogonal au vecteur y lorsque $\langle x, y\rangle = 0$, *on note* $x \perp y$

Th de Pythagore : $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dem : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ *, or* $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

Exo : Montrer que si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = 0$ *alors u est l'endomorphisme nul*

Si $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$ *, u est-il l'endomorphisme nul ?*

Def : Soit A une partie de E, on appelle orthogonal de A, l'ensemble $A^{\perp} = \{x \in E, \forall a \in A, x \perp a\}$

Prop : Soient E un préhilbertien réel, A et B deux parties de E alors

$A^{\perp}$ *est un sous espace de E*

$A \subset (A^{\perp})^{\perp}$, $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

$A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$, *l'égalité a lieu si A est un sous espace*

$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ (*F et G sont des sous espaces vectoriels*)

$(\overline{A})^{\perp} = A^{\perp}$

Dem : ⊙ $0 \in A^{\perp}$, $A^{\perp} \neq \emptyset$, $A^{\perp} \subset E$

$\forall (z, z') \in (A^{\perp})^2$, $\forall x \in A$, $\langle z + \lambda z', x\rangle = \langle z, x\rangle + \lambda \langle z', x\rangle = 0$, $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel de E*

⊙ $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}$, $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in (A^{\perp})^{\perp}$

⊙ *Soit* $z \in B^{\perp}, \forall a \in A \subset B$ *alors* $\langle z, a\rangle = 0 \Rightarrow z \in A^{\perp}$

⊙ *Si* $x \in A \cap A^{\perp} \Rightarrow \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, *si A est un sous espace alors* $0 \in A \cap A^{\perp}$

⊙ $F \subset (F+G) \Rightarrow (F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ *de même* $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ *donc* $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$

Si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, $\forall z = y_F + y_G \in F + G$, $\langle x, z\rangle = \langle x, y_F\rangle + \langle x, y_G\rangle = 0$

⊙ $A \subset \overline{A} \Rightarrow (\overline{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$

Soit $x \in A^{\perp}$, $\forall y \in \overline{A}$, $\exists (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $y_n \to y$

Or $\langle x, y_n\rangle = 0 \to \langle x, y\rangle = 0$ *par continuité*

Def : F et G deux sous espaces de E sont dit supplémentaires orthogonaux lorsqu'ils vérifient $E = F \oplus G$ *et* $G = F^{\perp}$

Exo : Dans $M_n(\mathbb{R})$ *déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques*

Th : Si E est un espace préhilbertien, tout sous espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal, on a donc $E = F \oplus F^{\perp}$

Dem : On note $(e_i)_{i=1..p}$ *une base orthonormée de F.* $\forall x \in E$ *on définit* $y = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x\rangle e_i \in F$

Or $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle \Rightarrow \langle y - x, e_k\rangle = 0$ *donc* $y - x \in F^{\perp}$

Enfin $x = y + (x-y) \in F + F^{\perp} \Rightarrow E = F + F^{\perp}$. *Comme* $F \cap F^{\perp} = \{0\} \Rightarrow E = F \oplus F^{\perp}$

Conséquence : Si F est un sous espace vectoriel de E euclidien alors $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$

Par contre dans $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, $(\mathbb{R}[X])^{\perp} = \{0\}$

Dem : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ *tel que si* $n > N \Rightarrow \| f_n - f \|_{\infty} < \varepsilon$

$$\| f_n - f \|_2^2 = \int_0^1 (f_n(t) - f(t))^2 \,\mathrm{d}t \le \int_0^1 \| f_n - f \|_{\infty}^2 \,\mathrm{d}t < \varepsilon^2 \Rightarrow \| f_n - f \|_2 < \varepsilon$$

Soit $f \in \overline{A}^{\infty} \Rightarrow \exists (f_n) \in A$ *tel* $\| f_n - f \|_{\infty} \to 0$, *or* $\exists (f_n) \in A$ *tel* $\| f_n - f \|_2 \to 0$

donc que $f \in \overline{A}^{2} \Rightarrow \overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^{2}$

Nous savons que si $A \subset E$ *alors* $A^{\perp} = \left(\overline{A}^{2}\right)^{\perp}$.

D'après le théorème de Stone Weierstrass, toute fonction continue sur $[0,1]$ *est la limite uniforme d'une suite de polynômes* $\Rightarrow E = \overline{\mathbb{R}[X]}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{R}[X]}^{2} \Rightarrow E = \overline{\mathbb{R}[X]}^{2}$

$(\mathbb{R}[X])^{\perp} = \left(\overline{\mathbb{R}[X]}^{2}\right)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$ (cet exercice prouve bien que $E \ne F \oplus F^{\perp}$)

4°) Projection orthogonale :

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$
On appelle projection sur F parallement à G l'endomorphisme p de E tel que $\forall x \in E,\ x = x_F + x_G$ *alors* $p(x) = x_F$. *Nous savons qu'une projection est un projecteur et que* $F = \operatorname{Im} p$ *et* $G = \ker p$

Def : Un projection sera appelée projection orthogonale sur F lorsque $G = F^{\perp}$

Rem : Il faut que F admette un supplémentaire orthogonal pour définir une projection orthogonale sur F, ceci sera immédiat si F est de dimension finie

Prop : f est une projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $fof = f$ *et* $\ker f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$

5°) Le théorème de projection orthogonale :

Rappel : Si F est une partie de E on note $d(a,F) = \inf_{y \in A} \|y - a\|$

Th : Soit E un espace préhilbertien réel, a un élément de E et F un sous espace de E alors

Soit $x \in F$ *on a* $\|a - x\| = d(a,F) \Leftrightarrow a - x \in F^{\perp}$

Dem : $(\Rightarrow)$ *on effectue un calcul préliminaire* $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall k \in \mathbb{R}$

$\|a - (x + ky)\|^2 = \|a - x\|^2 - 2k\langle a - x, y\rangle + k^2 \|y\|^2$ *(*)*

si x vérifie $\|a - x\| = d(a,F)$ *alors (*) donnera* $\forall y \in F$, $\forall k \in \mathbb{R}$

$-2k\langle a - x, y\rangle + k^2\|y\|^2 \ge 0 \Rightarrow \langle a - x, y\rangle = 0\ \forall y \in F \Rightarrow a - x \in F^{\perp}$

$(\Leftarrow)$ *on a* $\forall y \in F$, $y = x + (y - x)$, $\|a - y\|^2 = \|a - x\|^2 + 2\langle a - x, x - y\rangle + \|x - y\|^2 \ge \|a - x\|^2$

ce qui donne bien $\|a - x\| = d(a,F)$

Th (suite) : Si $E = F \oplus F^{\perp}$ *alors* $p_F(a)$ *est l'unique vecteur x de F qui vérifie* $\|a - x\| = d(a,F)$

Dem : Soit (x,x') *tel que* $\|a-x'\|=\|a-x\|=d(a,F)$ *alors* $(a-x,a-x')\in\left(F^{\perp}\right)^{2}$
d'où $(a-x)-(a-x')=x'-x\in F^{\perp}$ *par structure d'espace vectoriel mais* $x-x'\in F$
Donc $x=x'$ *(unicité)*
De plus $\forall a\in F$, $a=p_F(a)+(a-p_F(a))$ *avec* $a-p_F(a)\in F^{\perp}$ *(existence)*

Th : Inégalité de Bessel : $\forall x\in E$ $\|p_F(x)\|\le\|x\|$
Dem : D'après Pythagore $\|x\|^2=\|p_F(x)\|^2+\|x-p_F(x)\|^2\Rightarrow\|x\|^2\ge\|p_F(x)\|^2$

Exo : Déterminer $d(A,S_n(\mathbb{R}))$, $A\in M_n(\mathbb{R})$

Th : E un espace euclidien, $(e_i)_{i=1..p}$ *est une base orthonormée de F, alors* $\forall x\in E$, $p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}\langle e_i,x\rangle e_i$
Dem : $p_F(x)\in F\Rightarrow p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_i$
$\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\langle p_F(x),e_k\rangle=\alpha_k$ *et comme* $x=p_F(x)+y$ *où* $y\in F^{\perp}\Rightarrow\langle x,e_k\rangle=\langle p_F(x),e_k\rangle$

Exo : $E=\mathbb{R}^3$ *déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F où* $F=vect((1,1,1),(1,-1,1))$

I) Adjoint d'endomorphisme d'un espace euclidien :

1°) Représentation d'une forme linéaire :

Th : E espace euclidien et E son dual*
Pour tout a de E, l'application $j(a):x\mapsto\langle a,x\rangle$ *est une forme linéaire sur E*
Pour toute forme linéaire f sur E , il existe un unique a élément de E tel que pour tout x de E : $f(x)=\langle a,x\rangle$
Autrement dit, l'application $j:\ a\mapsto j(a)$ *est un isomorphisme de E sur son dual*
Dem : Il est clair que $x\mapsto\langle a,x\rangle$ *est une forme linéaire*
On définit donc j : $E\to E^*$, $j(a+\lambda b):x\mapsto\langle a+\lambda b,x\rangle=\langle a,x\rangle+\lambda\langle b,x\rangle$
Donc $j(a+\lambda b)=j(a)+\lambda j(b)\Rightarrow j\in\ell(E,E^*)$
Soient $(a,b)\in E^2$ *tel que* $j(a)=j(b)\Rightarrow\forall x\in E,\langle a-b,x\rangle=0\Rightarrow a-b\in E^{\perp}=\{0\}$
L'application linéaire j est injective or $\dim E=\dim E^*$ *donc j est surjective*

2°) Définition :

Def : Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E, s'il existe un endomorphisme v de E tel que $\forall(x,y)\in E^2:\langle u(x),y\rangle=\langle x,v(y)\rangle$. *On dit que v est l'adjoint de u*

*Th : Si un endomorphisme admet un endomorphisme adjoint alors il est unique, on le notera alors u**
Dem : On suppose l'existence de v et w tels que $\forall(x,y)\in E^2:\langle u(x),y\rangle=\langle x,v(y)\rangle=\langle x,w(y)\rangle$
On en déduit $\forall(x,y)\in E^2:\langle x,v(y)-w(y)\rangle=0$
On pose $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $x=e_i$ *vecteur de la base de E.*
On a $\forall y\in E$, $(v(y)-w(y))\perp e_i\Rightarrow(v(y)-w(y))\in E^{\perp}=\{0\}$

Soit $\forall y \in E,\ v(y) - w(y) = 0 \Rightarrow v = w$

Ex : Soit p la projection orthogonale sur F

$\forall x \in E,\ \exists (x', x'') \in F \times F^{\perp}$ *tq* $x = x' + x''$ *et* $y = y' + y''$

$\langle p(x), y \rangle = \langle x', y' + y'' \rangle = \langle x', y' \rangle = \langle x' + x'', y' \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ *d'où* $p^* = p$

Th : Tout endomorphisme d'un espace euclidien admet un adjoint

Dem : Soit $(e_i)_{i=1}^n$ *une base orthonormée de E, et* $A = mat(u, (e_i))$

On pose v l'endomorphisme de E tel que $A^T = mat(v, (e_i))$

$\forall (x, y) \in E^2 : \langle u(x), y \rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y = \langle x, v(y) \rangle$ *d'où* $v = u^*$

Conséquence : Soit $(e_i)_{i=1}^n$ *une base orthonormée de E, alors la matrice de* u^* *est* A^T

Conséquence : un endomorphisme u et son adjoint ont même rang, même trace et même déterminant

$rang(u^*) = rang(u),\ trace(u^*) = trace(u)$ *et* $\det(u^*) = \det(u)$

Th : Un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^* = p$

Dem : $(\Rightarrow)$ $\forall (x, y) \in E^2,\ x = p(x) + x'$ *et* $y = p(y) + y'$

$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), y' \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

$\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle x', p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

p est donc bien symétrique

$(\Leftarrow)$ *Soit* $x \in \operatorname{Im} p$ *et* $y \in \ker p$

$\langle x, y \rangle = \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ *donc* $\operatorname{Im} p \perp \ker p$

Exo : Soit u un endomorphisme, montrer que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$ *si et seulement si* $u^* = -u$

<u>3°) Propriétés :</u>

Prop : Soit E un espace euclidien , u et v deux endomorphismes de E, on a alors :

$(u^*)^* = u,\ (uov)^* = v^* ou^*,\ (au + bv)^* = au^* + bv^*$

Dem : C'est assez immédiat en utilisant les matrices dans une base orthorméee
Sinon on peut le prouver autrement pour le plaisir

$\forall (x, y) \in E^2, \langle uov(x), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle = \langle x, v^* ou^*(y) \rangle$

Th : Soit u un endomorphisme on a $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

Dem : Soit $x \in \ker u^*,\ \forall y \in \operatorname{Im} u,\ \exists z \in E$ *tel que* $y = u(z)$

$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = \langle u^*(x), z \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y \Rightarrow x \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ *ie* $\ker u^* \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

Or $\dim \ker u^* = n - rg(u^*) = n - rg(u) = \dim (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ *donc* $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

Th : Soit u un endomorphisme, pour que F est un sous espace soit stable par u il faut et il suffit que $F^{\perp}$ *est stable par u**

Dem : $(\Rightarrow)$ *On suppose F stable par u*

Soit $x \in F^{\perp},\ \forall y \in F,\ \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$ *car* $u(y) \in F$

Ainsi $u^*(x)\in F^{\perp}$

$(\Leftarrow)$ *Même raisonnement avec* $\left(u^*\right)^*=u$

Exo : Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x\in E\ ,\ \left\|f(x)\right\|\leq\|x\|$

Montrer alors que $\forall x\in E\ ,\ \left\|f^*(x)\right\|\leq\|x\|$, *en déduire que* $Ker\left(f-Id\right)=Ker\left(f^*-Id\right)$

II) Isométrie vectorielle d'un espace euclidien :

1°) Endomorphisme orthogonal :

Def : Un endomorphisme u de E est orthogonal si $\forall(x,y)\in E^2,\ \left\langle u(x),u(y)\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle$
(On dit que u conserve le produit scalaire)

Th : Soit u un endomorphisme de E de dimension finie, les 3 propriétés sont équivalentes
(i) u conserve le produit scalaire
(ii) u conserve la norme (isométrie)
(iii) u est bijectif et $u^{-1}=u^*$

Dem : $(i)\Rightarrow(ii)$ *on pose* $x=y\Rightarrow\left\langle u(x),u(x)\right\rangle=\left\langle x,x\right\rangle\Rightarrow\left\|u(x)\right\|=\|x\|$

$(ii)\Rightarrow(i)$ *on a*

$$\left\langle u(x),u(y)\right\rangle=\frac{1}{2}\left[\left\|u(x+y)\right\|^2-\left\|u(x)\right\|^2-\left\|u(y)\right\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right]=\left\langle x,y\right\rangle$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$ *soit* $x\in\ker u\Rightarrow\left\|u(x)\right\|=0=\|x\|\Rightarrow x=0$ *donc u est bijectif*

$\left\langle u(x),y\right\rangle=\left\langle u(x),u\left(u^{-1}(y)\right)\right\rangle=\left\langle x,u^{-1}(y)\right\rangle$, *soit* $u^{-1}=u^*$

$(iii)\Rightarrow(i)$ $\left\langle u(x),u(y)\right\rangle=\left\langle x,u^{-1}\left(u(y)\right)\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle$

Def : On appellera isométrie vectorielle tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien

Ex : Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle

Prop : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux forme un groupe pour la loi o appelé groupe orthogonal, noté $O(E)$

Dem : On montre que $\left(O(E),o\right)$ *est un sous groupe de* $\left(GL(E),o\right)$

Tout endomorphisme orthogonal est bijectif donc $O(E)\subset GL(E)$

$Id\in O(E)\neq\emptyset$ *et* $\forall(u,v)\in O(E)^2$

$\left\|uov(x)\right\|=\left\|u\left(v(x)\right)\right\|=\left\|v(x)\right\|=\|x\|\Rightarrow uov\in O(E)$

$\|x\|=\left\|uou^{-1}(x)\right\|=\left\|u^{-1}(x)\right\|\Rightarrow u^{-1}\in O(E)$

Donc $\left(O(E),o\right)$ *est un groupe*

Prop : u est orthogonal si et seulement si l'image de toute base orthonormée est une base orthonormée

Dem : $(\Rightarrow)$ *Soit* $\left(e_i\right)_{i=1..n}$ *une base orthonormée de E, comme u est bijectif alors* $\left(u\left(e_i\right)\right)_{i=1..n}$ *est une base de E, de plus* $\left\langle u\left(e_i\right),u\left(e_j\right)\right\rangle=\left\langle e_i,e_j\right\rangle=\delta_{ij}$, *cette base est bien orthonormée*

$(\Leftarrow)$ *Soit* $(e_i)_{i=1..n}$ *une base orthonormée de E, alors* $\forall x\in E,\ x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *et* $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *. Donc* $u(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ *comme* $(u(e_i))_{i=1..n}$ *est orthonormée, on aura aussi* $\|u(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *donc u est une isométrie vectorielle*

Prop : Si u est une isométrie vectorielle et si F est stable par u alors $F^{\perp}$ *est aussi stable par u*

Dem : Soit F stable par u , donc $u(F)\subset F$ *or u est bijective donc* $\dim(u(F))=\dim(F)$

On a donc $u(F)=F$

Soit $y\in F^{\perp}$ *,* $\forall x\in F$ *,* $\exists z\in F$ *tel que* $x=u(z)$

on a $\langle u(y),x\rangle=\langle u(y),u(z)\rangle=\langle y,z\rangle=0\Rightarrow u(y)\in F^{\perp}$

<u>2°) Matrices orthogonales :</u>

Def : On appelle matrice orthogonale toute matrice associée à un endomorphisme orthogonal
On note $O(n)$ *le groupe des matrices orthogonales*

Th : Si on munit E d'une base orthonormée
$A\in O(n)\Leftrightarrow A^T A=I_n \Leftrightarrow A\in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $A^T=A^{-1}$

Dem : On utilise $\forall(x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^{-1}(y)\rangle$

$\forall(X,Y)\in(\mathbb{R}^2)^2,\ (AX)^T Y=X^T(A^{-1}Y)\Leftrightarrow X^T A^T Y=X^T A^{-1}Y\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$

Exo : Soit $A\in A_n(\mathbb{R})$ *montrer que* $B=(I_n+A)(I_n-A)^{-1}$ *est orthogonale*

Th : Une matrice A est orthogonale si et seulement si ces colonnes forment une famille orthonormale
Dem : L'image d'une BON est une BON, or les colonnes forment l'image de la base

Prop : Si $A\in O(n)$ *alors* $\det(A)=\pm 1$

Dem : Soit A la matrice de u, on a $AA^T=I_n\Rightarrow\det(A)\det(A^T)=(\det(A))^2=1$

Def : Si A est orthogonale et que son déterminant vaut 1*, on dit que A est orthogonale positive ou directe, elle appartient alors au groupe spécial orthogonal noté* $SO(n)$
Sinon on dit qu'elle est orthogonale négative ou indirecte
On dit aussi que l'endomorphisme u associé à A est orthogonal positif et $u\in SO(E)$
(on démontre trivialement que $(SO(n),\times)$ *est un sous groupe de* $(O(n),\times)$ *)*

<u>III) Endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien</u>

<u>1°) Définition :</u>

Def : E un espace euclidien, u un endomorphisme de E est dit auto-adjoint lorsque
$\forall(x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$ *(on dit aussi qu'il est symétrique)*
Ex : Les projecteurs orthogonaux

Exo : Soit $A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$*, montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale*

Prop : Dans une base orthonormée, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint est symétrique, c'est-à-dire $A^T = A$

Corollaire : L'ensemble $S(E)$ *des endomorphismes auto-adjoints d'un espace de dimension n est un sous espace vectoriel de l'ensemble des endomorphismes, il est de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$

Dem : immédiat car $(au+bv)^* = au^*+bv^* = au+bv$

Prop : Si u est auto-adjoint et si F est stable par u alors $F^{\perp}$ *est stable par u*

Dem : Nous savons que $F^{\perp}$ *est stable par* u^*

2°) Théorème spectral :

Th : Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien a des valeurs propres réelles et est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres
(E est somme directe orthogonale des sous espaces propres de u)

Dem : ⊙ *Le polynôme caractéristique de u est scindé sur* $\mathbb{C}$*, il existe donc toujours une valeur propre complexe* λ

Soit x un vecteur propre (dont les coordonnées sont complexes)

On note $\overline{x}$ *son conjugué on a alors* $u(x)=\lambda x$ *et* $u(\overline{x})=\overline{\lambda x}$

$\langle u(x),\overline{x}\rangle = \lambda.\langle x,\overline{x}\rangle = \langle x,u(\overline{x})\rangle = \overline{\lambda}.\langle x,\overline{x}\rangle$

Si on se place dans une base orthonormée alors $\langle x,\overline{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \|x\|^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$

⊙ *On procède par récurrence sur n la dimension de E*

Toujours vérifiée pour $n=1$

On suppose que tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace de dimension $n-1$ *est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres*

Soit u un endomorphisme auto-adjoint, u admet au moins une valeur propre λ *qui est réelle*

Soit e_1 *un vecteur propre unitaire associé à* λ*,* $D=vect(e_1)$ *est stable par u et donc* $D^{\perp}$ *l'est aussi*

soit v *la restriction de u à* $D^{\perp}$ *c'est un endomorphisme auto-adjoint d'un espace de dimension* $n-1$ *donc il existe une base* β *orthonormée de* $D^{\perp}$ *constituée de vecteurs propres de v donc de u*

On ajoute alors e_1 *à* β *pour obtenir la base orthonormée de vecteurs propres de E*

Corollaire : Toute matrice A symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ *donc il existe une matrice P orthogonale et D diagonale telle que* $A = PD\,{}^tP$

Conséquence : Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux

Dem : Soit $x\in E_\lambda, y\in E_\mu$ *or* $\langle u(x),y\rangle = \langle x,u(y)\rangle \Rightarrow \lambda\langle x,y\rangle = \mu\langle x,y\rangle$

or $\lambda\neq\mu \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

Exo : Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Exo : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, *on note* $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ *ses valeurs propres avec leur ordre de multiplicité.*

Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^2$

Rem : le cas des matrices antisymétriques
Montrer que le spectre d'une matrice antisymétrique est inclus dans $\{0\}$, *donc* $\forall \lambda \neq 0,\ A+\lambda I_n$ *est inversible*

<u>*3°) Le cas des matrices symétriques définies positives*</u>

Def : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, *on dit que A est positive lorsque* $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T AX \geq 0$
Soit $u \in S(E)$, *u est positif lorsque* $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$

Th : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, *A est positive si et seulement si son spectre est inclus dans* $\mathbb{R}^+$

Dem : $A \in S_n(\mathbb{R})$ *donc on sait déjà que son spectre est réel*

$(\Rightarrow) \forall \lambda \in Sp(A),\ \exists X \neq 0$ *tel que* $AX = \lambda X$, *or* $X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$

D'après l'hypothèse on a $X^T AX \geq 0$ *et* $\|X\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$

$(\Leftarrow)$ *On considère u l'endomorphisme associé à A, il est diagonalisable*

il existe donc $(\varepsilon_i)_{i=1..n}$ *une base orthonormée de vecteurs propres et* $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$

Donc $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i \Rightarrow \langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$ *car* $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$

Or je rappelle que $\langle u(x), x\rangle = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T AX$

Notation : Très souvent l'ensemble des matrices symétriques positives sera noté $S_n^+(\mathbb{R})$, *c'est un sous espace de* $S_n(\mathbb{R})$, *mais ce n'est pas un sous espace vectoriel.*
L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs sera noté $S^+(E)$
Exo : $\forall u \in \ell(E),\ uou^* \in S^+(E)$ *et* $u^* ou \in S^+(E)$

Rem : attention une matrice dont le spectre est positif n'est pas forcément positive, je rappelle qu'elle doit d'abord être symétrique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin S_2^+(\mathbb{R})$ *or* $Sp(A) = \{1\}$
Exo : Soit A une matrice symétrique et positive, montrer qu'il existe une matrice B symétrique et positive telle que $A = B^2$

Def : Si A est une matrice symétrique positive on dit qu'elle est définie lorsque $X^T AX = 0 \Rightarrow X = 0$
Si u est un endomorphisme auto-adjoint positif on dit qu'il est défini lorsque $\langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
On note les ensembles $S_n^{++}(\mathbb{R})$ *et* $S^{++}(E)$
On peut généraliser la définition suivante
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, *on dit que A est définie positive lorsque* $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Rightarrow X^T AX > 0$

Th : Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$*, A est définie positive si et seulement si son spectre est inclus dans* $\mathbb{R}^{+*}$

Dem : $(\Rightarrow)$ *Comme A est positive, on a déjà* $Sp(A)\subset\mathbb{R}^{+}$*, supposons que* $0\in Sp(A)$

Alors $\exists X\neq 0$ *tel que* $AX=0 \Rightarrow X^T AX=0$ *avec* $X\neq 0$ *ce qui est impossible car A est définie*

Donc $Sp(A)\subset\mathbb{R}^{+*}$

$(\Leftarrow)$ *Le spectre est positif donc A est déjà positive, si u est l'endomorphisme associé à A, il est diagonalisable. Il existe* $(\varepsilon_i)_{i=1..n}$ *une base orthonormée de vecteurs propres* $\forall x\in E$ *,* $x=\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$

$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\varepsilon_i$ *donc* $\langle u(x),x\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {x_i}^2=0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i x_i^2=0$ *or* $\lambda_i\neq 0$ *ainsi* $x=0$

$\langle u(x),x\rangle=(AX)^T X=X^T A^T X=X^T AX=0\Rightarrow X=0$

Exo : Montrer que $S\in S_n^{++}(\mathbb{R})\Leftrightarrow \exists M\in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $S=M^T M$

Exo : Si $u\in S^{++}(E)$ *alors* $x\mapsto\langle u(x),x\rangle$ *est encadrée sur* $S=\{x\in E,\ \|x\|=1\}$ *par* $\lambda=\min(Sp(u))$ *et* $\mu=\max(Sp(u))$

<u>IV) Réduction d'endomorphismes orthogonaux :</u>

<u>1°) Orientation d'un espace :</u>

Def : Soit E un espace euclidien, orienter E revient a lui choisir une base $\beta=(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

Def : Une base $\beta'=(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *sera appelée base directe dans l'espace E orienté par* $\beta=(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *lorsque* $\det_\beta(\varepsilon_i, i\in[\![1,n]\!])>0$

<u>2°) Réduction d'une isométrie vectorielle :</u>

Prop : Si u est une isométrie vectorielle alors son spectre $\subset\{-1,1\}$

Dem : Soit $\lambda\in Sp(u)\Rightarrow\exists x\neq 0$ *tel que* $u(x)=\lambda x$

Or $\|u(x)\|=|\lambda|\|x\|=\|x\|\Rightarrow|\lambda|=1$

Th : Dans le cas du plan euclidien, si u est une isométrie vectorielle alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit : $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$ *ou* $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$

Dem : Soit A la matrice orthogonale associée à u

$A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ *donc* $a^2+b^2=1$ *et* $c^2+d^2=1$

Ainsi $\exists(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]^2$ *tel que* $a=\cos\theta,\ b=\sin\theta,\ c=\sin\varphi,\ d=\cos\varphi$

Or $ac+bd=0\Rightarrow\sin(\theta+\varphi)=0\Rightarrow\varphi=-\theta$ *ou* $\pi-\theta$

Def : Lorsque $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$*, on dit que A est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle* θ*, on la notera* $R(\theta)$

Rem : L'ensemble des complexe de module 1 *est isomorphe à* $SO(2)$

Prop : $R(\theta)R(\theta')=R(\theta+\theta')$

Dem : On effectue le produit matriciel

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}$$

Def : Lorsque $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$, *A est la matrice d'une symétrie orthogonale*

Dans le cas de la symétrie orthogonale u est diagonalisable car u est annulé par X^2-1

Th : Si $u\in O(E)$ *où* $\dim E=n\geq 2$, *il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :*

$$A=\begin{pmatrix}I_p & 0 & 0 & 0 & ... & \\ 0 & -I_q & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & R_1 & 0 & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & R_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & R_r\end{pmatrix} \text{ où } R_k=\begin{pmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix},\ k\in[\![1,r]\!]$$

On a donc $p+q+2r=n$ *(si l'un de ces entiers est nul, les blocs n'existent pas)*

Dem : On effectue un raisonnement par récurrence sur la dimension n de E

Pour $n=1$, *u est une homothétie mais aussi une isométrie donc* $u=Id$ *ou* $-Id$

Pour $n=2$ *, il existe une base orthonormée telle que la matrice de u soit*

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2) \text{ ou } A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Dans le second cas, la matrice est symétrique réelle et de valeurs propres -1 *et* 1 *(car u est annulé par* X^2-1 *) donc semblable à nouveau dans une base orthonormée à* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Supposons le résultat acquis pour les isométries vectorielles sur les espaces de dimension $n-2$ *et* $n-1$

1° cas : Si u admet une valeur propre, nécessairement 1 *ou* -1*, pour tout vecteur propre unitaire* e_1, $H=(vect(e_1))^{\perp}$ *est stable par u et de dimension* $n-1$*, alors il existe une base orthonormée de H dans laquelle la matrice de la restriction de u à H soit :*

$$A_1=\begin{pmatrix}I_p & 0 & 0 & 0 & ... & \\ 0 & -I_q & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & R_1 & 0 & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & R_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & R_r\end{pmatrix}\Rightarrow mat(u,\{e_1\}\cup\beta)=\begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

En réorganisant l'ordre des vecteurs de la base on retrouve la forme souhaitée

2°cas : u n'admet aucune valeur propre réelle, le polynôme caractéristique est alors produit de polynôme irréductible de degré 2 donc à discriminant négatif. On note P_1 *un de ces polynômes :* $P_1(X)=X^2+\alpha X+\beta$

Soit x un vecteur non nul de $\ker(P_1(u))$ *alors* $(x, u(x))$ *sont linéairement indépendants car sinon x serait vecteur propre. On va montrer que* $\Pi = Vect(x, u(x))$ *est stable par u, en effet* $u(ax+bu(x)) = au(x)+bu^2(x) = au(x)-b(\alpha u(x)+\beta x)$

La restriction de u à Π *est orthogonale dans un espace de dimension 2 et ne possède pas de valeur propre donc il existe une base orthonormée de* Π *dans laquelle la matrice est représentée par* R_1. *De plus* $\Pi^{\perp}$ *est aussi stable par u, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à* $\Pi^{\perp}$, *comme* $E = \Pi \oplus \Pi^{\perp}$, *la réunion des deux bases donnera la matrice souhaitée*

3°) Cas particulier : Réduction d'une isométrie vectorielle de l'espace de dimension 3

Th : Si $u \in O(\mathbb{R}^3)$ *alors il existe* $\theta \in [0, 2\pi]$ *et une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Dem : On étudie à part les cas triviaux où $u = Id_E$ *ou* $-Id_E$

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme de degré 3, il admet donc au moins une racine réelle $\lambda = \pm 1$

On note e_1 *unitaire tel que* $u(e_1) = \lambda e_1$, *alors* $D = vect(e_1)$ *est stable par u et comme u est orthogonal* $P = D^{\perp}$ *est aussi stable par u*

Ainsi la restriction de u à P *est un endomorphisme orthogonal en dimension 2 alors il existe* (e_2, e_3) *une base orthonormée de P dans laquelle la matrice est*
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ *ou* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Dans le second cas, A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres donc sera semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On considère alors la base (e_1, e_2, e_3) *qui est orthonormée*

On obtient donc quand $\lambda = 1$, *la matrice* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *deviendra* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *en permutant 2 vecteurs de la base (soit S avec* $\theta = 0$*)*

quand $\lambda = -1$, *la matrice* $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *deviendra* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *en permutant 2 vecteurs de la base (soit R avec* $\theta = \pi$ *)*

Def : Dans le cas où $R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ *, on dit que R représente une rotation d'axe* $\ker(u-Id)$ *et d'angle* θ

Lorsque $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ *alors A représente une symétrie orthogonale par rapport à* $\ker(u-Id)$*. Si cet espace est une plan (premier cas) A est une réflexion*

Lorsque $S=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\notin SO(3)$*, on dit que cette matrice représente une isométrique vectorielle indirecte*

Application : Comment retrouver les éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle ?

- *Chercher les vecteurs invariants* $E_1=\ker(u-Id)=Vect(e_1)$ *, on choisit* e_1 *unitaire*
- *On choisit alors* e_2 *unitaire et orthogonal à* e_1*, et* $e_3=e_1\wedge e_2$ *alors dans la base ainsi construite on aura la matrice réduite d'une rotation*
- *On a* $u(e_2)=\cos\theta.e_2+\sin\theta.e_3\Rightarrow\cos\theta=\langle u(e_2),e_2\rangle$ *et* $\sin\theta=\langle u(e_2),e_3\rangle$
- *On a aussi* $tr(u)=1+2\cos\theta$

Exo : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u dont la matrice est donnée par $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Exo : Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ *autour de l'axe dirigé par* $x=(1,1,1)$

Exo : Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par $e_1=(1,1,1)$ *et* $e_2=(1,0,2)$