Rappels préliminaires

Exo1 :

Montrer que f définit un produit scalaire .

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto (x-2y)(x'-2y') + yy' + (y+z)(y'+z')$$

Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire

Exo2 :

Dans le plan euclidien de dimension 2, on considère la courbe C d'équation $X^T M X = 1$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Retrouver l'équation de C

Puis montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(M + 2I) \oplus \text{Ker}(M - 4I)$

En déduire l'expression de M dans la nouvelle base, puis retrouver l'équation de C exprimée dans le nouveau repère

Exo3 :

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, ainsi que du produit scalaire canonique qui lui confère une structure d'espace euclidien, on considère l'espace H donné par l'équation suivante $x + y + z + t = 0$.

Déterminer une base orthonormée de H

Exo4 :

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 t P(t) Q(t) dt$

Montrer que $\langle \rangle$ est bien un produit scalaire sur E , et déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire

Exo5 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Montrer que $\langle \rangle$ est bien un produit scalaire sur E

Exo6 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Montrer que $\langle \rangle$ est bien un produit scalaire sur E

Exo7 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace préhilbertien E de dimension n

Montrer que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes

(i) $\forall (x, y) \in E^2 \langle u(x), u(y) \rangle = \langle v(x), v(y) \rangle$

(ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y \rangle = 0$

Montrer que si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = 0$ alors u est l'endomorphisme nul

Si $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$, u est il l'endomorphisme nul ?

On suppose qu'il un endomorphisme v de E tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

Montrer que (ii) est équivalente à $uov = vou$

Exo8 :

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ on note $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$

Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Exo9 :

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Soit F l'ensemble de fonctions polynomiales sur $[0,1]$, déterminer l'orthogonal de F

Exo10 :

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

Pour A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ on note $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

Déterminer l'orthogonal du sous espace S_n de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Exo11 :

Montrer que si A est une partie de E alors $\overline{A}^\perp = A^\perp$

Exo12 :

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit f par $f(t) = t \ln t$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$

Minimiser $\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$

Exo13 :

Soit $E = \mathbb{R}^4$, on définit Π par les équations suivantes
$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$$

On note $X = (1, 1, 1, -1)$, déterminer $d(X, \Pi)$

Exo14 :

Soit f une application linéaire de E dans F , E et F étant deux espaces vectoriels normés.

Soit $v \in F$ montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$

Montrer que si f est injective alors x_0 est unique

Exo15 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère D la droite engendrée par le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base canonique

Exo16 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère P le plan engendré par les vecteurs de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 0)$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique

Exo17 :

Soit $F = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (1, 0, 1, 2))$ déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exo18 :

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base et son produit scalaire canoniques on définit l'espace :

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer une base de H , puis de son orthogonal

En déduire la matrice de la projection orthogonale sur H dans la base canonique

Exo19 :

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.

Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{ker } u$ sont orthogonaux

Exo20 :

Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R}), |Tr(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$

Exo21 :

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E

Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

Exo22 :

Soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer

$d(A, F)$.

Exo23 :

Déterminer lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$ la valeur minimale de l'intégrale $\int_0^\pi (t - a \cos t - b \sin t)^2 dt$

Exo24 :

f désigne toujours une application linéaire de E dans F

Soit y un élément de F , montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y' \quad \text{où } x \in (\text{ker } f)^\perp \text{ et } y' \in (\text{Im } f)^\perp$$

Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique

Exo25 :

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Soit $(r_i)_{i=1..p}$ une famille de p vecteurs de E non nuls tels que : $\forall (i, j), i \neq j \Rightarrow \langle r_i, r_j \rangle < 0$

Soit $(k_i)_{i=1..p}$ p réels quelconques, montrer que $\left\| \sum_{i=1}^p k_i r_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^p k_i \right\|^2$

Montrer que la famille $(r_i)_{i=1..p-1}$ est libre

1) Adjoint d'un endomorphisme

Exo26 :

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Pour A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ on note $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$

A et B étant données dans $M_n(\mathbb{R})$, soit F définie par $F(M) = AM - MB$, déterminer l'adjoint de F pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Exo27 :

Montrer que $\text{rang}(u \circ u^*) = \text{rang}(u)$

Exo28 :

E un espace vectoriel muni du produit scalaire et de la norme associée que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$, f est un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$

1°) Soit f^* l'endomorphisme adjoint de f , montrer que $\forall x \in E, \|f^*(x)\| \leq \|x\|$

2°) Montrer que : $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Ker}(f^* - \text{Id})$

3°) Puis montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Im}(f - \text{Id})$ sont en somme orthogonale

Exo29 :

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire et de la norme euclidienne canonique que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. GL est l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{R}^2$. On définit : $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ et pour u dans GL on note u^* son adjoint, soit $v = (u^{-1})^* o(u^{-1})$. Montrer que $u(B) = \{x \in \mathbb{R}^2, \langle v(x), x \rangle \leq 1\}$

Exo30 :

Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f^* \circ f = f$

a. Montrer que $f \circ f^*$ est un projecteur orthogonal dont vous préciserez l'image

b. Soit $x \in (\ker f)^\perp$, montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$

Exo31 : Soit f un endomorphisme de E , montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes

(i) $f^* = -f$

(ii) $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$

Exo32 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\|u\| = \|u^*\|$

Puis montrer que $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$

II) Endomorphisme auto-adjoint

Exo33 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires de E . On note f l'application de E dans E telle que $f(x) = \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$

Montrer que f est symétrique et déterminer ses éléments propres

Exo34 :

Soit n un entier supérieur à 2

A une matrice d'ordre n telle que $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$

Montrer que A est symétrique définie positive

Exo35 :

Soient M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(I_n + MN) = \det(I_n + NM)$

Soit A une matrice symétrique réelle positive, montrer que $\det(I_n + A) \geq 1$

Exo36 :

Montrer que S est une matrice symétrique réelle définie positive si et seulement si

$\exists M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = M^T M$

Exo37 :

Soit $A \in S_n^+$, montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^+$ telle que $A = B^2$

Exo38 :

Montrer que si A est définie positive alors si il existe une autre matrice C symétrique définie positive qui commute avec B telle que $A = C^2$, alors $B = C$

Exo39 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $u^* \circ u \in S^+(E)$

Exo40 :

Soit $u \in S^+(E)$, montrer que $\|u\| = \rho(u)$ où $\rho(u) = \sup(|\lambda|, \lambda \in Sp(u))$

Exo41 :

Déterminer les valeurs propres réelles d'une endomorphisme bijectif antisymétrique

Exo42 :

Soit A une matrice symétrique à coefficients dans le corps des réels. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs

propres avec leur ordre de multiplicité. Montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$

Exo43 :

Soient a et b deux réels non nuls et M une matrice carrée d'ordre n telle que $m_{i,i} = a$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$. Diagonaliser M

Exo44 :

Soient A et B deux matrices colonnes réelles non nulles non liées

Soit la matrice $M = AB^T + BA^T$

Déterminer les éléments propres de M

On séparera le cas où le vecteur propre X appartient ou non à $\text{Vect}(A, B)$

Exo45 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de B

Exo46 :

Soient M et N deux matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$

Montrer que $0 \leq \text{Tr}(MN) \leq \text{Tr}(M)\text{Tr}(N)$

Exo47 :

Soit $E = \mathbb{R}^n$, on considère φ une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe un automorphisme p de $\mathbb{R}^n$ tel que on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n : \varphi(p(x), p(y)) = \langle x, y \rangle$$

Montrer que la matrice de φ a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}^{*+}$

Exo48 :

E est un espace euclidien. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E

Pour $u \in S(E)$, montrer $u \mapsto \sqrt{\text{tr}(u^2)}$ définit une norme sur $S(E)$

Exo49 :

Dessiner dans $E = \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x, y) \in E \text{ tels que } x^2 - 3xy + y^2 = 3\}$

Exo50 :

Dessiner dans $E = \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x, y) \in E \text{ tels que } x^2 + xy + y^2 = 18\}$

III) Isométrie vectorielle

Exo51 :

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme orthogonal q de E est appelé quart de tour si $q^2 = -\text{Id}$

Montrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et q un quart de tour, on note $f = \cos \alpha \text{Id} + \sin \alpha q$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal

On suppose $\sin \alpha \neq 0$, f est-il diagonalisable ?

Exo52:

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $a \in E - \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On définit $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\forall x \in E, f(x) = x + \lambda \langle x, a \rangle a$

Déterminer les éléments propres de f

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une isométrie

Exo53 :

Soit A une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer ses valeurs propres réelles

Soit la matrice $B = (I + A)(I - A)^{-1}$, montrer que B est une matrice orthogonale

Exo54 :

Déterminer toutes les matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M + M + M^T = 0$

Exo55 :

Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $x = (1, 1, 1)$

Exo56 :

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par

$e_1 = (1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 2)$

Exo57 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u dont la matrice est donné

$$\text{par } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Exo58 :

$E = \mathbb{R}^3$ et f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Caractériser } f$$

Exo59 :

$E = \mathbb{R}^3$ et f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Caractériser } f$$

Exo60 :

Déterminer les réels a , b , c , d et e pour que A soit une matrice de rotation avec $a > 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & c \\ \frac{2}{7} & a & d \\ \frac{6}{7} & b & e \end{pmatrix}$$

Exo61 :

Soit E l'espace euclidien de dimension 3, on note u l'endomorphisme de E dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que u est orthogonal, mais que u n'est ni une rotation vectorielle, ni une symétrie orthogonale

Réduire la matrice de u , on pourra exhiber une droite et un plan stable

Exo62 :

Soit E l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A = AA^T$ et $A^2 - A + I_n = 0$

Montrer que si $A \in E$ alors A est orthogonale

Montrer que si E n'est pas vide alors n est pair

Décrire E , lorsque $n = 2$

Exo63 :

Soit E un espace euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x seront notés : $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|$

Soit H une sous espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur H

Soit K un second sous espace vectoriel de E , r la projection orthogonale sur K

On note λ une valeur propre non nulle de por et u un vecteur propre associé

- Montrer que u appartient à H et que $r(u) - \lambda u$ est un élément de $H^\perp$
- Etablir que $\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2$
- En déduire que toutes les valeurs propres de por sont dans le segment $[0,1]$

On suppose maintenant que p et r commutent

- Montrer que por est un projecteur orthogonal
- Montrer que $\ker(por) = \ker p + \ker r$ et $\text{Im}(por) = \text{Im } p \cap \text{Im } r$

Exo64 :

Dans $M_n(\mathbb{R})$, on note le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $(P, Q) \in (O_n(\mathbb{R}))^2$, montrer que $\|PAQ\| = \|A\|$

Soient A et B deux matrices symétriques réelles, montrer qu'il existe deux matrices diagonales D_A et D_B et une matrice orthogonale P telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$

Exo65 :

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E . On note B la boule fermée de centre O de rayon 1

Montrer que si $f(B) = B$ alors f est une isométrie

Exo66 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ telle que $A^T A = AA^T$

On suppose qu'il existe un entier p non nul tel que $A^p = 0$

Montrer que $A^T A = 0$ puis que $A = 0$

Exo67 :

Soit E un espace euclidien, u un vecteur non nul

$g \in O(E)$ et σ une réflexion par rapport à $(\text{vect}(u))^\perp$

Etudier $w = g \circ \sigma \circ g^{-1}$