

Chap : Probabilité
Compléments sur les variables aléatoires discrètes

1) Ensemble dénombrable :

1°) Définitions :

Def : Un ensemble I est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$

Def : Un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ (il est fini ou dénombrable)

Prop : Les parties infinies de $\mathbb{N}$ (exemple les entiers pairs) sont dénombrables

Dem : Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$, c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément noté x_0

Soit $A_1 = A \setminus \{x_0\}$ c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément noté x_1 . On construit ainsi par récurrence $A_n = A \setminus \{x_i, i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément noté x_n . On crée alors une bijection de A dans $\mathbb{N}$

Prop : Les parties infinies d'un ensemble dénombrable sont dénombrables

2°) Propriétés :

Prop : $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et pour tout k , $\mathbb{N}^k$ est dénombrable

Dem : Montrons d'abord que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

On pose la fonction g définie par

$$g(0) = (0,0), g(1) = (1,0), g(2) = (0,1), g(3) = (2,0), g(4) = (1,1), g(5) = (0,2)$$

$$g(6) = (3,0), g(7) = (2,1), g(8) = (1,2), g(9) = (0,3), g(10) = (4,0), g(11) = (3,1), \dots$$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, si $n = p + q$, $(p,q) = g\left(\frac{n(n+1)}{2} + q\right)$, on crée bien une numérotation de tous les couples d'entiers donc une bijection de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$

Ensuite on définit $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$ telle que $h(n,m) = (n, g(m))$ qui crée bien une bijection

Par récurrence sur k , on montre aussi que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable

Prop : Un produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable

Dem : Soit E_i un ensemble dénombrable, $f_i: E_i \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection

Alors $E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{N}^k$ tel que $f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1), \dots, f_k(x_k))$ est une bijection

Prop : Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable

Dem : Soit $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ où I et E_i sont dénombrables, $\phi: I \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection

pour tout i dans I on note la bijection $\phi_i: E_i \rightarrow \mathbb{N}$, pour chaque élément x de E on note $\pi(x) = \min(\phi(i), x \in E_i)$, on note j tel que $\pi(x) = \phi(j)$ alors l'application $\gamma: x \mapsto (\pi(x), \phi_j(x))$ est une injection de E dans $\mathbb{N}^2$ donc γ est une bijection de E sur son image qui est une partie infinie d'un ensemble dénombrable, E est donc dénombrable

Prop : $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables

Dem : Pour $\mathbb{Z}$: Soient $P = \{(n, 0) \in \mathbb{N}^2\}$ et $Q = \{(0, n) \in \mathbb{N}^2\}$ ce sont deux ensembles dénombrables. On note la bijection $f: \mathbb{Z} \rightarrow P \cup Q$ telle que si $n \geq 0$, $f(n) = (n, 0)$ et si $n < 0$ $f(n) = (0, n)$

Pour $\mathbb{Q}$: Soit $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$ avec $p \wedge q = 1$ est bijective de $\mathbb{Q}$ sur son image qui est une partie infinie d'un ensemble dénombrable donc dénombrable

Prop : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (preuve de Georg Cantor 1845-1918)

Dem : On va démontrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable, on suppose qu'il l'est et donc que

$[0, 1] = \{(r_n), n \in \mathbb{N}\}$. On construit alors le réel x de la manière suivante, si la n ème décimale de r_n est différente de 1 alors la n ème décimale de x est 1, sinon elle sera égale à 2.

On a alors $x \in [0, 1]$, $x \notin \{(r_i), i \in \mathbb{N}\}$, on a construit x un élément de $[0, 1]$ différent de tous les r_i

Exercice : L'ensemble des irrationnels est-il dénombrable ?

II) Espace probabilisé :

1°) Définitions :

Def : Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les conditions de déroulement mais dont les résultats ne peuvent être connus qu'après sa réalisation. Les résultats possibles sont appelés des éventualités. L'ensemble des éventualités est appelé l'univers, on le note Ω

Def : Un événement aléatoire peut se produire ou non suivant le résultat d'une expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de l'univers Ω . On dira que l'événement A est réalisé si le résultat de cette expérience est un élément de A

Ex : On lance un dé, $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $A = \llcorner \text{obtenir un tirage pair} \llcorner = \{2; 4; 6\}$

Ω est aussi l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible

$A \cup B$ est appelé la réunion ou la disjonction de A et de B

$A \cap B$ est appelé l'intersection ou la conjonction de A et de B

$\bar{A}$ est appelé l'événement contraire de A

Deux événements sont incompatibles ou disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$

Def : On appelle tribu sur Ω un ensemble T de parties de Ω qui contient Ω et qui soit stable par complémentaire et union dénombrable

C'est-à-dire : $\Omega \in T$, $\forall A \in T$, $\bar{A} \in T$ et $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^\square$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in T$

Def : Soit T une tribu sur Ω . On appelle probabilité toute application P définie sur T à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in I}$ d'événements deux à deux disjoints

$$P\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} P(A_n) \quad (\text{on parlera de } \sigma\text{-additivité})$$

Prop : Si Ω est au plus dénombrable alors la famille $(P(w))_{w \in \Omega}$ est sommable de somme 1

Contre exemple : Si $\Omega = \mathbb{N}$ et $P(n) = \frac{1}{2^n}$, alors P n'est pas une probabilité car $P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \neq 1$

Def : On appelle espace probabilisé la donnée de (Ω, T, P) où T et P sont respectivement une tribu et une probabilité sur l'univers Ω

Prop et def : Soit Ω un univers fini et A une partie de Ω . La probabilité uniforme pour que l'événement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \quad (\text{formule de Laplace}).$$

On définit bien une probabilité sur Ω

Dem : On a immédiatement $P(A) \in [0, 1]$ et $P(\Omega) = 1$

Si (A_n) une famille d'événements 2 à 2 disjoints, on prouve alors que

$$\text{Card}\left(\bigcup_{p=1}^n A_p\right) = \sum_{p=1}^n \text{Card}(A_p) \Rightarrow P\left(\bigcup_{p=1}^n A_p\right) = \sum_{p=1}^n P(A_p)$$

Exercice : On considère un jeu de 32 cartes et on tire au hasard 5 cartes de ce jeu. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ? d'obtenir au moins deux rois ? d'obtenir exactement deux rois et 2 cœurs ?

2°) Propriétés des probabilités :

Prop : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dem : On a $\Omega = A \cup \bar{A}$ réunion disjointe donc $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$

On a aussi $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Donc $A \cup B = B \cup (A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Prop : Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Dem : On a $B = A \cup (B \cap \bar{A})$ or ces deux événements sont disjoints donc

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$$

Prop : Si (A_n) est une suite croissante d'événements alors $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p\right)$

Dem : On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \cap \bar{A}_0$, $B_2 = A_2 \cap \bar{A}_1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \cap \bar{A}_{k-1}$

La croissance de la suite (A_n) prouve que la famille (B_n) est disjointe

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Prop : Si (A_n) est une suite décroissante d'événements alors $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p\right)$

Dem : On pose $C_k = \bar{A}_k$ alors la suite (C_k) est croissante et $P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} C_p\right)$, or

$$\overline{\bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p} = \bigcup_{p=0}^{+\infty} C_p \quad \text{et} \quad 1 - P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - P\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p\right)$$

Prop : Plus généralement si (A_n) est une suite d'événements alors $P\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p\right) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} P(A_p)$

3°) Définitions complémentaires :

Def : Un événement A est dit négligeable lorsque $P(A) = 0$

Exo : On dispose d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans chaque urne se trouvent n boules blanches et une boule rouge. On tire successivement une boule dans chaque urne. On considère l'événement B : « on n'obtient que des boules blanches ». Montrer que B est négligeable.

On considère B_n : « on tire une boule blanche dans l'urne n » et $A_n = \bigcap_{i=1}^n B_i$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ et

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i) = \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Def : Un événement A est dit presque sûr lorsque $P(A) = 1$

Ex : On lance un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 6, on note F l'événement : « on effectue un nombre fini de lancers ». Soit A_n l'événement : « au bout de n lancers on n'a toujours pas eu de 6 », alors

$$P(A_n) = \frac{5^n}{6^n} \rightarrow 0. \text{ Si } \bar{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_{n+1} \subset A_n, P(\bar{F}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0 \text{ donc } P(F) = 1$$

La propriété d'obtenir un 6 en un nombre fini de lancers est presque sûre

4°) Les probabilités conditionnelles :

Def : Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable, l'application qui à tout événement A de Ω associe $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$ définit une probabilité sur Ω . On l'appelle la probabilité conditionnée par B (on pourra aussi la noter $P(A/B)$)

$$\text{Dem : } P_B(A) \in [0,1], P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1, \text{ soit } (A_n) \text{ une suite d'événements 2 à 2 disjoints}$$

$$P_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$$

Prop : On a donc $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

$$\text{Prop : (formule de Bayes) : } P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Th (formule des probabilités composées) : Sur un espace probabilisé si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'événements non négligeables tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \neq 0$

$$\text{alors } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Dem : On effectue une récurrence sur n .

$$\text{Si } n = 2 : P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$$

On suppose la propriété vérifiée pour $n-1$

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) = P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n) \times P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \text{ d'où le résultat au rang } n$$

Exemple : Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On effectue au hasard et sans remise n tirages successifs d'une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient blanches ?

Th (formule des probabilités totales) : Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé, I un ensemble au plus dénombrable et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements (on dit aussi qu'il forme une partition de Ω)

non négligeables alors pour tout événement B on a $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Cas particulier : $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$

Dem : On a $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow B = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ car c'est une réunion disjointe

Donc $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Exemple : On considère une famille d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^}$, dans chaque urne se trouve une boule rouge et $3^n - 1$ boules blanches. On choisit l'urne n avec la probabilité $P(U_n) = \frac{1}{2^n}$. Les événements de choisir une urne forme bien un système complet d'événements non négligeables car $\sum_{n=1}^{\infty} P(U_n) = 1$. On tire alors une boule au hasard dans l'urne n . Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge.*

$$P(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) P_{U_n}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{5}$$

Formule générale de Bayes : Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements non négligeables alors pour tout événement B et pour tout $j \in I$,

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}$$

Dem : On a $P_B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{P(B)}$ puis on prend $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Exemple : Une maladie frappe 1% de la population. Un test de dépistage est fiable à 95% Quelle est la probabilité qu'une personne détectée positive au test soit effectivement malade ?

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(M)P_M(T) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T)} = \frac{0,95 \times 0,01}{0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,05} = 0,16$$

5°) Indépendance :

Def : On dit que deux événements sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc si $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$

Ou si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$

Prop : Si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ le sont aussi, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi

$$\text{Dem : } P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

Def: Soit une famille $(A_i)_{i=1..n}$ d'événements, on dit qu'ils sont mutuellement indépendants lorsque

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Rem : C'est différent d'être 2 à 2 indépendants

Exemple : On lance un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4. On considère les événements

A : « Obtenir 1 ou 2 », B : « Obtenir 1 ou 3 » et C : « Obtenir 2 ou 3 »

Montrer que A , B et C sont indépendants, mais pas mutuellement indépendants

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \text{ or } P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

6°) Deux exercices pour conclure :

Exo1 : Un rat est dans un labyrinthe à 4 portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, il reçoit une légère décharge électrique. On observe le nombre d'essais utilisés pour trouver la sortie. On envisage 3 hypothèses :

- Le rat possède une bonne mémoire. A chaque essai il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les autres
- Le rat a une mémoire immédiate. A chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les 3 autres
- Le rat n'a pas de mémoire. A chaque essai il choisit une porte au hasard

Définir pour chaque hypothèse l'univers et calculer la probabilité de chaque événement

Exo2 : Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant

-- lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A , elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0,75

-- lorsqu'elle est en B , elle se fixe en A avec une probabilité de 0,75

-- lorsqu'elle est en C , elle ira toujours en B

On note a_n, b_n et c_n la probabilité qu'à l'instant n , la particule se trouve en A , B ou C

Déterminer a_n, b_n et c_n

En déduire les limites de a_n, b_n et c_n

III) Variables aléatoires discrètes:

1°) Définition :

Def: Soit un espace probabilisé (Ω, T, P) où Ω est au plus dénombrable, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme égale à 1

Def: Soit un espace probabilisé (Ω, T, P) , on appelle variable aléatoire discrète toute application X de Ω dans une partie E de $\square$ telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable

Si A est une partie de E on peut définir l'événement $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \text{ telles que } X(\omega) \in A\}$

$(X = x) = \{\omega \in \Omega \text{ telles que } X(\omega) = x\}$

Prop : Les événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements et $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$

Def : On définit la loi P_X de X comme la distribution des probabilités discrètes $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$

Une loi de probabilité est définie par la donnée des $P(X=x)$, où $x \in X(\Omega)$

Rem : Si $A=(x_i)_{i \in I} \subset X(\Omega)$ alors $P_X(A) = \sum_{i \in I} P(X=x_i)$

Ainsi $P(X=x) = \sum_{X(\omega)=x} P(\{\omega\})$

Exemple : On lance deux dés à 6 faces, on note X la somme obtenue alors $X(\Omega) = [2, 12]$

$$P(X=5) = P((1,4)) + P((2,3)) + P((3,2)) + P((4,1)) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Rem : Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)$

Si X et Y sont deux variables aléatoires de même univers image suivent la même loi on note $X \square Y$

Def : Si f est une application de $X(\Omega)$ sur un ensemble F , alors $Y=f(X)$ est une variable aléatoire, on définit également la loi de probabilité de Y par

$$\forall B \subset F, P_Y(B) = P(f(X) \in B) = P(X \in f^{-1}(B)) = P_X(f^{-1}(B))$$

Exemple : On lance deux dés et on note X la somme des deux chiffres obtenus

On pose ensuite $Y=|7-X|=f(X)$. Alors $Y(\Omega) = [0, 5]$ et $P(Y=2) = P(X=5) + P(X=9) = \frac{2}{9}$

Rem : Si X et Y suivent la même loi alors $f(X) \square f(Y)$

2°) Couples de variables aléatoires :

Def : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω , le couple (X, Y) est une variable aléatoire sur Ω . On définit alors la loi conjointe de (X, Y) par

$$P(X=x, Y=y) = P((X=x) \cap (Y=y)) \text{ où } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

Exemple : Une urne contient quatre boules dont une verte, une blanche et deux rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la seconde boule rouge. On obtient la loi conjointe :

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3	4
2	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Prop : La famille des $((X, Y)=(x, y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ forme un système complet d'événements

Application : Pour connaître les lois marginales de X et de Y à partir de la loi conjointe

On utilise la formule $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$

On aura de même $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$

Dem : $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ forme une partition de l'univers

$(Y = y) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x, Y = y)$ (disjointe)

$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$

Rem : Dans l'exemple précédent $P(Y = 3) = \sum_{x=1}^4 P(X = x, Y = 3) = \frac{1}{3}$

Exercice : On considère 2 VAD X et Y telles que $\forall (i, j) \in \square^2, P(X = i, Y = j) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$

Déterminer les lois marginales de X et de Y

Def : Si $(X = x)$ est non négligeable, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est définie par

$$P_{X=x}(Y = y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)}$$

On en déduit $P(X = x, Y = y) = P_{(X=x)}(Y = y)P(X = x)$

Def : Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants. Alors $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$

On note alors $X \parallel Y$

Rem : $X \parallel Y$ si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et de Y

Prop : Si $X \parallel Y$ alors $P(X \in A, Y = y) = P(X \in A)P(Y = y) \Rightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$

Dem : $(X \in A, Y = y) = \bigcup_{x \in A} (X = x, Y = y)$ (disjointe)

$$P(X \in A, Y = y) = \sum_{x \in A} P(X = x, Y = y) = \sum_{x \in A} P(X = x)P(Y = y) = P(x \in A)P(Y = y)$$

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{y \in B} P(X \in A, Y = y) = \sum_{y \in B} P(X \in A)P(Y = y) = P(x \in A)P(Y \in B)$$

Prop : (lemme des coalitions) Soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes et f et g deux fonction définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes

C'est-à-dire $X \parallel Y \Rightarrow f(X) \parallel g(Y)$

$$\begin{aligned} \text{Dem : } P(f(X) = a, g(Y) = b) &= P(X \in f^{-1}(a), Y \in g^{-1}(b)) \\ &= P(X \in f^{-1}(a))P(Y \in g^{-1}(b)) = P(f(X) = a)P(g(Y) = b) \end{aligned}$$

Def : Soient $(X_i)_{i=1..n}$ n variables aléatoires, elles sont mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont mutuellement

indépendants alors $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$

On généralise le lemme des coalitions : Si $(X_i)_{i=1..n}$ sont indépendantes alors les variables aléatoires $\forall N, f(X_1, \dots, X_N)$ et $g(X_{N+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi

3°) Espérance :

Def : Soit X une variable aléatoire discrète, si la famille $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X est d'espérance finie et la somme obtenue sera appelée espérance de X et on a $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$

On aura aussi $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ car $P(X=x) = \sum_{X(\omega)=x} P(\{\omega\})$. On note alors $X \in L^1$

Def : Une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance est nulle

Prop : Si $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq Y(\omega)$ ce qu'on notera $|X| \leq Y$ et si $Y \in L^1$ alors $X \in L^1$

Dem : $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)|P(\{\omega\}) \leq Y(\omega)P(\{\omega\})$ or $(Y(\omega)P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est sommable, toute somme finie de $|X(\omega)|P(\{\omega\})$ sera majorée, ce qui assure la sommabilité de $(|X(\omega)|P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$

Prop : Si $X \in L^1$ et $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

Dem : $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n+1) \Rightarrow P(X \geq n) = P(X = n) + P(X \geq n+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP(X=n) &= \sum_{n=0}^N n(P(X \geq n) - P(X \geq n+1)) = \sum_{n=1}^N nP(X \geq n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)P(X \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^N P(X \geq n) - NP(X \geq N+1) \end{aligned}$$

Or $0 \leq NP(X \geq N+1) = N \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X=n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X=n) \rightarrow 0$ car $X \in L^1$

Prop : Si $X \in L^1$ alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2, Y = aX + b \in L^1$ et on a $E(aX + b) = aE(X) + b$

Dem : $aE(X) + b = a \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) + b \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)$

$$aE(X) + b = \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b)P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b)P(aX + b = ax + b)$$

Ce qui prouve bien l'existence de $E(aX + b)$, ainsi que l'égalité

Prop : Si $X \in L^1$ et $Y \in L^1$ alors $X + Y \in L^1$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dem : On pose $Z = X + Y$

Pour tout $z \in Z(\Omega), B_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega); x + y = z\}$, la famille des B_z forme une partition de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. $P(Z=z) = \sum_{(x,y) \in B_z} P(X=x, Y=y)$

$$E(X) + E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) + \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y=y)$$

Or $P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)$ et $P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y)$

$$E(X) + E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) + \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

$$E(X) + E(Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xP(X=x, Y=y) + \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} yP(X=x, Y=y)$$

$$E(X) + E(Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x+y)P(X=x, Y=y) = \sum_{z \in Z(\Omega)} \sum_{(x,y) \in B_z} zP(X=x, Y=y)$$

Ainsi $E(Z)$ existe et vérifie l'égalité

Prop : L'espérance est un opérateur positif et croissant

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, soit $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega)$ ce qu'on notera $0 \leq X$ et si $X \in L^1$ alors $E(X) \geq 0$

Et si $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$ ce qu'on notera $X \leq Y$ et si $X \in L^1$ et $Y \in L^1$ alors $E(X) \leq E(Y)$

Dem : Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $x \geq 0$ et $P(X=x) \geq 0$ donc $E(X) \geq 0$

De plus $Y - X \geq 0 \Rightarrow E(Y - X) = E(Y) - E(X) \geq 0$

Conséquence : Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+, E(X) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, P(X=x) = 0$

Prop : Formule de transfert : Soient X une variable aléatoire et f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce

$$\text{cas on a } E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

On dit que l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X

Dem : Pour tout $y \in f(X)(\Omega), B_y = \{x \in X(\Omega), y = f(x)\}$, la famille des B_y forme une partition de $X(\Omega)$ donc $P(f(X)=y) = \sum_{x \in B_y} P(X=x)$

$$(\Rightarrow) \text{ On a } E(f(X)) = \sum_{y \in f(X)(\Omega)} yP(f(X)=y) \text{ on pose } Y = f(X)$$

$$E(Y) = \sum_{y \in f(X)(\Omega)} y \sum_{x \in B_y} P(X=x) = \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \sum_{x \in B_y} f(x)P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

($\Leftarrow$) il suffit de réécrire cette égalité de droite à gauche

Exercice : Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X=n) = \frac{1}{2^n}$, calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$

Prop : Si $X \in L^1$ alors $|E(X)| \leq E(|X|)$

$$\text{Dem : } \left| \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) \right| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X=x) = E(|X|)$$

Prop : Inégalité de Markov : $\forall a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$

$$\text{Dem : On a } E(|X|) = \sum_{|x| \geq a} |x|P(X=x) + \sum_{|x| < a} |x|P(X=x) \geq a \sum_{|x| \geq a} P(X=x) = aP(|X| \geq a)$$

Exercice : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X=n) = \frac{3}{4^n}$. Majorer $P(X \geq n)$

Prop : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de L^1 alors $Z = XY \in L^1$ et on aura $E(XY) = E(X)E(Y)$

Dem : On pose $Z = XY$

Pour tout $z \in Z(\Omega), B_z = \{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), z = xy\}$ la famille des B_z forme une partition de

$$X(\Omega) \times Y(\Omega). \text{ Donc } P(Z=z) = \sum_{(x,y) \in B_z} P(X=x, Y=y) = \sum_{(x,y) \in B_z} P(X=x)P(Y=y)$$

$$E(X)E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y=y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xP(X=x)yP(Y=y) \\ = \sum_{z \in Z(\Omega)} \sum_{(x,y) \in B_z} xyP(X=x)P(Y=y) = E(Z)$$

On généralise cette propriété à une famille de variables aléatoires indépendantes

$$\text{Si } (X_i)_{i \in I} \text{ sont indépendantes alors } E\left(\prod_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} E(X_i)$$

Contre exemple : la réciproque est fautive

Si on considère le couple (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

	$X = 1$	$X = -1$	Loi de Y
$Y = -1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$Y = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$Y = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
Loi de X	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

La loi de probabilité de XY est : $P(XY=1) = \frac{1}{4}$, $P(XY=-1) = \frac{1}{4}$ et $P(XY=0) = \frac{1}{2}$

Donc $E(XY) = 0$, or $E(X) = \frac{1}{4}$ et $E(Y) = 0 \Rightarrow E(XY) \neq E(X)E(Y)$

Cependant $P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} \neq P(X=1)P(Y=1)$, X et Y ne sont donc pas indépendants

4°) Variance, écart type et covariance :

Def : Soient X une variable aléatoire et n un entier naturel non nul, on dit que X possède un moment d'ordre n lorsque la famille $(x^n P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; on note $X \in L^n$

On note alors $E(X^n) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^n P(X=x)$

Th : $X \in L^2 \Rightarrow X \in L^1$

Dem : On utilise l'inégalité $|x| < 1 + x^2 = y$

Or les familles $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(x^2 P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sont sommables, $Y \in L^1 \Rightarrow X \in L^1$

Inégalité de Cauchy Schwarz :

Soient X et Y deux variables aléatoires de L^2 alors $XY \in L^1$ et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Dem : On a $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = z$ or les familles $(x^2 P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(y^2 P(Y=y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont sommables donc $Z \in L^1 \Rightarrow XY \in L^1$.

On considère ensuite $f(\lambda) = E((X + \lambda Y)^2) \geq 0$

Donc on obtient un trinôme en λ : $E(X^2) + 2\lambda E(XY) + \lambda^2 E(Y^2)$ de signe constant ainsi son discriminant réduit $E(XY)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

Def : Soit $X \in L^2$, on appelle variance de X le réel positif : $V(X) = E((X - E(X))^2)$

On définit également l'écart type par le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Prop : (Formule de Huygens) : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Dem : On a $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$, par linéarité de l'espérance

on a $V(X) = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 \times 1 = E(X^2) - E(X)^2$

Prop : Si $X \in L^2$ alors $Y = aX + b \in L^2$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Dem : On a $P(aX + b = ax + b) = P(X = x)$, or $(ax + b)^2 = ax^2 + 2abx + b^2$

Les familles $(x^2 P(X = x))$, $(xP(X = x))$ et $(P(X = x))$ sont sommables donc la famille $((ax + b)^2 P(aX + b = ax + b))$ est sommable

On a directement $V(aX + b) = E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - E(aX + b)^2$

$V(aX + b) = a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - [aE(X) + b]^2 = a^2 [E(X^2) - E(X)^2]$

Def : Une variable aléatoire de variance 1 est dite réduite

Prop : Soit une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Dem : On a $E(X^*) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X - E(X)) = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0$

et $V(X^*) = \frac{1}{V(X)} V(X - E(X)) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$

Def : Si $X \in L^2$ et $Y \in L^2$, on définit la covariance de X et Y par le réel $Cov(X, Y)$ tel que

$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

Prop : (Formule de Huygens) : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Dem : On a $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

$Cov(X, Y) = E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$

$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$

Prop : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$

Attention la réciproque est fautive

Prop : $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$

Dem : On a $Cov(aX + b, cY + d) = E(acXY + adX + bcY + bd) - E(aX + b)E(cY + d)$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(aX+b, cY+d) &= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd \\ &\quad - [acE(X)E(Y) + adE(X) + bcE(Y) + bd] \\ &= ac[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

$$\text{Prop : } V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Dem : On a $V(X+Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X+Y)^2$, l'expression existe car $X \in L^2$ et $Y \in L^2$ donc $XY \in L^1$.

$$\begin{aligned}V(X+Y) &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

$$\text{Prop : Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes alors } V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Th : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\text{Soit } X \text{ une variable aléatoire alors } \forall \varepsilon > 0 : P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V(X)$$

$$\text{Dem : On crée } J = \{x \in X(\Omega), |x - E(X)| \geq \varepsilon\}, K = \{x \in X(\Omega), |x - E(X)| < \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned}V(X) &= E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X=x) \\ &= \sum_{x \in J} (x - E(X))^2 P(X=x) + \sum_{x \in K} (x - E(X))^2 P(X=x)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } V(X) \geq \varepsilon^2 \sum_{x \in J} P(X=x) = \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$$

Exercice : On réalise 400 fois une expérience dont la probabilité de succès est de 0,8. On suppose que les 400 expériences sont indépendantes. On note X le nombre de succès obtenus.

Donner un minorant de $P(300 < X < 340)$

IV) Lois de probabilités :

1°) Lois usuelles :

Def : Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$

lorsque $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$

Exemple : Lancer de dé où X est le numéro de la face affichée

$$\text{Prop : Si } X \text{ suit la loi uniforme telle que } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ alors } E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\text{Dem : On a } E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

Def : X suit une loi de Bernoulli (Jacques 1654-1705) de paramètre p lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et que

$$P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p$$

Cette loi modélise la situation d'échec ou de succès

$$\text{Prop : Si } X \text{ suit la loi de Bernoulli alors } E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p)$$

Dem : On a $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1^2 p + 0^2 (1-p)) - p^2 = p(1-p)$$

Def : X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout entier naturel k inférieur à n , $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim B(n, p)$

Cette loi comptabilise le nombre de succès pour n expériences aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p

Prop : Si X suit la loi binomiale alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Dem : On utilise $(Y_i)_{i=1}^n$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p et $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ alors

$$E(X) = nE(Y) = np \text{ et } V(X) = nV(Y) = np(1-p)$$

Exercice : Soient X et Y indépendantes suivant des lois binomiales $B(m, p)$ et $B(n, p)$. Montrer que la loi $X+Y$ suit la loi binomiale $B(m+n, p)$

2°) La loi géométrique :

On considère une expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $p \in]0, 1[$. On renouvelle cette expérience de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le premier succès, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on dit que X suit une loi géométrique de paramètre p , on note $X \sim G(p)$.

Alors on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Prop : Si X suit une loi géométrique de paramètre p alors son espérance est finie et $E(X) = \frac{1}{p}$

Dem : La série $\sum nx^{n-1}$ est la dérivée de la série entière (géométrique) de rayon 1, si $x \in]-1, 1[$,

elle est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Donc la famille $(np(1-p)^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et $\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$

Prop : La variance d'une loi géométrique de paramètre p est $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Dem : On utilise alors $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} - \frac{1}{p^2} \\ &= p(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Exercice : Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires

On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise.

On note X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche

Calculer l'espérance et la variance de X

3°) La loi de Poisson (Siméon-Denis : 1781-1840)

Th : Soit $X_n \sim B(n, p_n)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Dem : On a déjà $p_n \sim \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln(1 - p_n) \sim -p_n$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \text{ or } \frac{n!}{(n-k)!} \sim n^k \Rightarrow \binom{n}{k} p_n^k \sim \frac{(np_n)^k}{k!} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{et } (n-k) \ln(1 - p_n) \sim -np_n \rightarrow -\lambda \Rightarrow (1 - p_n)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}$$

Def : On dit que X suit une loi de Poisson lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. C'est une loi de probabilité qui décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un laps de temps fixé, ces événements se produisant avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent. Cela correspond à une expérience dont un événement se réalise avec une fréquence λ , on répète l'expérience dans le temps de manière indépendante, et X est le nombre de fois où l'événement se produit

Exercice : Une firme de fabricant d'ordinateurs constate que le nombre de défauts présentés par un ordinateur à la sortie de la chaîne de fabrication suit une loi de poisson de paramètre 4. Quelle est la probabilité pour qu'un ordinateur ait au moins un défaut ?

Prop : Si X suit une loi de poisson de paramètre λ alors son espérance est finie et vaut λ et sa variance vaut aussi λ

Dem : On a $kP(X = k) = ke^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ qui est bien le terme général d'une série convergente

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$V(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \text{ on utilise à nouveau } k^2 = k(k-1) + k$$

$$V(X) = e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Exercice : Si $X \sim P(\lambda), Y \sim P(\mu)$ et $X \perp Y$ quelle est la loi de $X + Y$

4°) La loi faible des grands nombres :

Th : Si (X_n) est une suite de variables aléatoires de L^2 , deux à deux indépendantes suivant la même loi,

si on note $m = E(X_k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ alors on a $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Dem : On considère la variable aléatoire $Y = \frac{S_n}{n}$

alors $E(Y) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = m$ et $V(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)$ par indépendance

donc $V(Y) = \frac{V(X_n)}{n}$. D'après Bienayme-Tchebychev $P(|Y - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$.

Finalement $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$

V) Les fonctions génératrices :

1°) Définition :

Def et Th : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série entière $\sum P(X=k)t^k$ a un rayon de convergence supérieur à 1 et converge normalement sur $[-1,1]$. La somme de cette série notée G_X est la fonction génératrice de la variable aléatoire X

On a donc : $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$

Dem : On a pour tout entier k , $P(X=k) \leq 1$ or $\sum t^k$ a pour rayon de convergence 1 donc le rayon de la série $\sum P(X=k)t^k$ est supérieur à 1

On pose $u_k(t) = P(X=k)t^k$ alors $\|u_k\|_{\infty, [-1,1]} \leq P(X=k) = w_k$ or $\sum w_k$ est convergente

On en déduit que $\sum u_k$ est normalement convergente sur $[-1,1]$

Prop : La fonction génératrice d'une variable aléatoire est C^∞ sur son disque ouvert de convergence

Rem : Par unicité du D.S.E, si deux variables aléatoires ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi, c'est pourquoi on dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X . Donc si $G_X = G_Y$ alors $X \sim Y$

Th : La fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = 1 - p + pt, R = \infty$$

Dem : Si $X \sim B(p)$ alors $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$

donc $G_X(t) = (1-p) + pt$

Th : La fonction génératrice d'une loi de Binomiale de paramètres n et p est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (1 - p + pt)^n, R = \infty$$

Dem : Si $X \sim B(n,p)$ alors $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

donc $G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = ((1-p) + pt)^n$

Th : La fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre p est donnée par

$$\forall t \in \left] \frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right], G_X(t) = \frac{pt}{(1-(1-p)t)}, R = \frac{1}{1-p}$$

Dem : Si $X \sim G(p)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^$ et $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$*

donc $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} [(1-p)t]^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ si $|(1-p)t| < 1$

Th : La fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}, R = +\infty$$

Dem : Si $X \sim P(\lambda)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ donc $G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}$

2°) Des théorèmes importants :

Th : Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. On a alors $E(X) = G'_X(1)$

Dem : La fonction G_X est dérivable sur $]-R, R[$ et $G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)t^{k-1}$

Elle est dérivable en 1 si et seulement si $\sum kP(X=k)$ est convergente

Ce qui équivaut à l'existence de l'espérance . Et on a $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = G'_X(1)$

Th (HP) : Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Dem : La fonction G_X est deux fois dérivable sur $]-R, R[$ et $G''_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X=k)t^{k-2}$

Elle est deux fois dérivable en 1 si et seulement si $\sum k(k-1)P(X=k)$ est convergente

Or $k(k-1) \sim k^2$, donc $G''_X(1)$ existe si et seulement si $\sum k^2P(X=k)$ converge, ce qui équivaut à l'existence du moment d'ordre 2 donc de la variance

De plus $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (G'_X(1))^2$

Or $G''_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(X=k) - \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$

Finalement $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Rem : Pour que ces deux théorèmes soient vérifiés il suffit que la rayon de convergence de G_X soit strictement supérieur à 1

Th : Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

Dem : On a $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$ et $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)t^k$

On pose $R = \min(R_X, R_Y)$, $\forall t \in]-R, R[$ $G_X(t) \times G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$

avec $c_n = \sum_{p+q=n} P(X=p)P(Y=q) = \sum_{p+q=n} P(X=p, Y=q)$ car X et Y sont indépendantes

Finalement $c_n = P(X+Y=n) \Rightarrow G_X(t) \times G_Y(t) = G_{X+Y}(t)$

Exemple : Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent une loi binomiale, $X \sim B(m, p)$ et $Y \sim B(n, p)$ alors $X+Y \sim B(m+n, p)$

Dem : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = ((1-p) + pt)^m$ et $G_Y(t) = ((1-p) + pt)^n$

Or X et Y sont indépendants donc $G_{X+Y}(t) = ((1-p) + pt)^m ((1-p) + pt)^n = ((1-p) + pt)^{m+n}$