Saint Rémi : MP
David Corneillie

Probabilité : Exercices vus en classe ou à faire

Dénombrements de MPSI

Exo1 :
Dans un village de 700 *habitants, existe-t-il au moins deux personnes qui ont les mêmes initiales ?*
Exo2 :
Quel est le nombre de parties de $[\![3,7]\!]$ *?*
Exo3 :
Une immatriculation de voiture en France est composée de 7 *caractères :* 2 *lettres,* 3 *chiffres et* 2 *lettres (ex :* DC-125-EF *) , les lettre I, O et U ne sont pas utilisées et les séries* SS *et* WW *ne sont pas utilisés dans le blocs de lettres de gauche et la série* SS *ne l'est pas dans le bloc de droite. Dénombrer le nombre d'immatriculations possibles sachant que la série de chiffres débute à* 001 .
Combien y a-t-il de plaque d'immatriculation contenant exactement un A et un 7 *?*
Combien y a-t-il de plaque avec au moins un A et un 7 *?*
Exo4 :
Une urne contient 15 *boules numérotées de* 1 *à* 15*. Les boules numérotées de* 1 *à* 5 *sont blanches, les boules de* 6 *à* 15 *sont noires*
On tire simultanément 5 *boules de l'urne*
 a. *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*
 b. *Combien de tirages sont constitués de* 2 *boules blanches et* 3 *boules noires ?*
On tire successivement 5 *boules sans remise*
 a. *En tenant compte de l'ordre combien y a-t-il de tirages possibles ?*
 b. *Combien de tirages sont constitués de* 2 *boules blanches et* 3 *boules noires sans tenir compte de l'ordre ?*
Exo5 :
Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ASSIS ?
Combien y a-t-il d'anagrammes de TARATATA ?
Exo6 :
Dans un lycée de 1200 *élèves,* 652 *pratiquent une activité sportive,* 327 *de la musique et* 453 *ne font ni du sport, ni de la musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens*
Exo7 :
Dans une classe de 30 élèves combien peut-on former de trinômes ?
Exo8 :
A l'aide de dénombrement montrer que $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$
Exo9 :
Quel est le cardinal de $\{(p,q)\in\mathbb{N}^2, p+q\le n\}$ *?*
Exo10 :
Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$*, on note* $S(n,p)$ *le nombre de surjections de* $[\![1,n]\!]$ *sur* $[\![1,p]\!]$
Déterminer $S(n,p)$ *si* $p>n$
Calculer $S(n,1)$ *et* $S(n,n)$
Combien d'applications de $[\![1,n]\!]$ *sur* $\{1,2\}$ *ne sont pas surjectives ? En déduire* $S(n,2)$
Montrer que $S(n,3)=3^n-3-3S(n,2)$*, en déduire* $S(n,3)$
On suppose $p\le n$*. Montrer que* $S(n,p)=p\left(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\right)$

En déduire que $S(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$

En déduire la valeur de $A_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n$

<u>Exo11 : (très difficile)</u>

Soit n un entier n naturel fixé, quel est le nombre de R-uple d'entiers naturels non nuls dont la somme des termes vaut n ?

<u>I) Espace probabilisé</u>

<u>Exo12 :</u>

On considère un jeu de 32 *cartes et on tire au hasard* 5 *cartes de ce jeu*

Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

<u>Exo13 :</u>

Une urne contient 15 *boules :* 1 *noire,* 5 *blanches et* 9 *rouges*

On tire simultanément au hasard 3 boules

Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage avec exactement 1 noire et au moins une rouge ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage monocolore ?

<u>Exo14 :</u>

Au moment où chacun possède un tiers du marché de la téléphonie mobile, trois opérateurs A,B et C décident de lancer un nouveau type de forfait annuel

-- A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante

-- les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante

-- les clients de la compagnie B restent toujours fidèles à cette compagnie

-- les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité de $\frac{1}{12}$*, de B avec une probabilité de* $\frac{7}{12}$ *et de C avec une probabilité de* $\frac{1}{3}$

On note a_n, b_n *et* c_n *la probabilité qu'à l'issue de l'année n, un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C pour l'année suivante*

Exprimer une relation entre a_n, b_n, c_n *et* $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$

En déduire l'expression de a_n, b_n *et* c_n *en fonction de n et déterminer la limite de ces suites*

<u>Exo15 :</u>

Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant

-- lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0,75

-- lorsqu'elle est en B, elle se fixe en A avec une probabilité de 0,75

-- lorsqu'elle est en C, elle ira toujours en B

On note a_n, b_n *et* c_n *la probabilité qu'à l'instant n, la particule se trouve en A, B ou C*

Exprimer une relation entre a_n, b_n, c_n *et* $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$

En déduire l'existence d'une matrice M carrée d'ordre 3 *telle que*

$${}^t\left(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}\right)=M\times{}^t\left(a_n\ b_n\ c_n\right)$$

En déduire l'expression de M^n*, puis de* a_n, b_n *et* c_n

Etudier les limites de a_n, b_n *et* c_n

<u>Exo16 :</u>

Quatre urnes contiennent des boules blanches et noires, l'urne 1 *contient quatre blanches et une noires , l'urne* 2 *contient trois blanches et deux noires, l'urne* 3 *contient deux blanches et trois noires, et l'urne* 4 *contient une blanche et quatre noires*

On choisit l'urne i avec une probabilité de $\frac{i}{10}$*, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche*
On suppose que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 *?*
<u>Exo17 :</u>
On classe les automobilistes assurés dans trois catégories d'âges : moins de 25 *ans, de* 25 *à* 50 *ans et plus de* 50 *ans. Le tableau nous donne la proportion de chaque catégorie et la probabilité qu'un assuré de cette catégorie déclare un accident dans l'année*

Classe	*Proportion*	*Probabilité*
Moins de 25 ans	*0,25*	*0,12*
De 25 à 50 ans	*0,53*	*0,06*
Plus de 50 ans	*0,22*	*0,09*

Un assuré est choisi au hasard quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident dans l'année ?
Quelle est la probabilité pour qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident soit âgé de moins de 25 *ans ?*
Quelle est la probabilité pour qu'un assuré de plus de 25 *ans ait déclaré au moins un accident ?*
Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant pas déclaré d'accident soit âgé de 25 *à* 50 *ans ?*
<u>Exo18 :</u>
On dispose de n urnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, dans chaque urne se trouvent n boules blanches et 1 boule rouge. On tire successivement une boule dans chaque urne. On considère l'événement B : on n'obtient que des boules blanches. B est-il négligeable ?*
<u>Exo19 :</u>
On lance un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 6, on note F l'événement : on effectue un nombre fini de lancers. Montrer que la propriété d'obtenir un 6 en un nombre fini de lancers est presque sûre
<u>Exo20 :</u>
On considère une famille d'urnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, dans chaque urne se trouve une boule rouge et* 3^n-1 *boules blanches. On choisit l'urne n avec la probabilité* $P(U_n)=\frac{1}{2^n}$*. On tire alors une boule au hasard dans l'urne n. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge.*
<u>Exo21 :</u>
On dispose de deux urnes U_1 *et* U_2*, on choisit la première urne une fois sur quatre, l'urne* 1 *contient trois boules blanches et deux rouges, l'urne* 2 *contient deux boules blanches et trois rouges. On tire au hasard une boule après avoir choisi une urne, quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?*
<u>Exo22 :</u>
Un rat est dans un labyrinthe à 4 *portes dont une seule conduit à la sortie*
Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, il reçoit une légère décharge électrique.
On observe le nombre d'essais utilisés pour trouver la sortie.
On envisage 3 *hypothèses :*

a. *Le rat possède une bonne mémoire. A chaque essai il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les autres*
b. *Le rat à une mémoire immédiate. A chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les* 3 *autres*
c. *Le rat n'a pas de mémoire. A chaque essai il choisit une porte au hasard*

Définir pour chaque hypothèse l'univers et calculer la probabilité de chaque événement
<u>Exo23 :</u>
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On effectue au hasard et sans remise n tirages successifs d'une boule dans l'urne.
Quelle est la probabilité que les boules tirées soient blanches ?

Exo24 :
Une foret se compose de trois types d'arbres, 30% *de chênes,* 50% *de peupliers et* 20% *de hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche* 10% *de chênes,* 4% *de peupliers et* 25% *de hêtres.*
Sachant qu'un arbre est malade quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?
Exo25 :
Une maladie frappe 1% *de la population. Un test de dépistage est fiable à* 95%
Quelle est la probabilité qu'une personne détectée positive au test soit effectivement malade ?
Exo26 :
On considère une matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ *où* $(a_i)_{i=1..4} \in \{0,1\}^4$
On tire au hasard une matrice de ce type. Donner la probabilité pour que la matrice soit diagonalisable
Exo27 :
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 vaut $\frac{1}{2}$. *On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance le dé et on obtient un 6, quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?*
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n *que ce dé soit pipé ?*
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$
Exo28 :
Une urne contient un boule rouge
Un joueur lance un dé équilibré
S'il fait 6, il tire une boule dans l'urne, sinon il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
Exo29 :
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille d'évènements sur un espace probabilisé* (Ω, T, P)
Montrer que $P\left(\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}\right) \le \exp\left(-\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)\right)$

II) III) Variables aléatoires et lois de probabilité :

Exo30 :
Soient X et Y deux variables aléatoires dont on donne la loi conjointe

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{30}$
1	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$

Donner les lois marginales de X et Y
Calculer leur espérance ainsi que la covariance de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
Exo31 :
Calculer la probabilité de gagner 5 *fois sur* 7 *au pile ou face*
Puis calculer la probabilité de gagner au moins une fois au pile ou face sur n expériences

<u>Exo32 :</u>

On effectue une suite de lancer d'un dé à 6 *faces, quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à* 5% *que la fréquence d'apparition du* 6 *est comprise entre* $\frac{1}{6}-0,01$ *et* $\frac{1}{6}+0,01$ *?*

<u>Exo33 :</u>

Soit X et Y deux variables aléatoires dont on donne la loi conjointe

Y \ X	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

Donner les lois marginales de X et Y

Calculer leur espérance

On note $U = X \times Y$ *déterminer la loi de U*

En déduire la covariance de X et Y

On note $V = \min(X, Y)$ *déterminer la loi de V*

Former la loi conjointe de U et V

<u>Exo34 :</u>

Une urne contient 4 *boules dont une verte, une blanche et deux rouges. On extrait successivement les* 4 *boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la seconde boule rouge.*

Donner la loi conjointe de X et Y

<u>Exo35 :</u>

Une urne contient $2n$ *boules : n rouges et n noires. On pioche au hasard et simultanément n boules. On appelle X le nombre de boules rouges obtenues.*

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance

<u>Exo36 :</u>

Dans une ville une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée il y a 2 *chances sur* 3 *qu'elle soit à son tour contaminée. Un représentant de commerce en parfaite santé décide de rendre visite à n habitants de cette ville. On note N le nombre de personnes contaminées qu'il rencontre. Donner la loi de N. Quelle est la probabilité qu'il soit contaminé à la fin de sa journée ?*

<u>Exo37 :</u>

On réalise 400 *fois une expérience dont la probabilité de succès est de* 0,8*. On suppose que les* 400 *expériences sont indépendantes. On note X le nombre de succès obtenus.*

Donner un minorant de $P(300 < X < 340)$

<u>Exo38 :</u>

Soient n un entier supérieur ou égal à 5 et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$*. Majorer* $P(X \geq n)$

<u>Exo39 :</u>

Une entreprise emploie 10 *salaries :* 3 *ingénieurs,* 2 *secrétaires et* 5 *techniciens.*

La direction désigne au hasard trois personnes pour participer à une commission.

X désigne le nombre de secrétaires présentes dans cette commission

Y le nombre d'ingénieurs.

Décrire la loi conjointe (X,Y) puis retrouver les lois marginales X et Y

<u>*Exo40 :*</u>

Une urne contient n boules, deux sont blanches et les autres sont noires
On tire une à une et sans remise les n boules.
On note X le rang de la première boule blanche tirée
Calculer l'espérance et la variance de X

<u>*Exo41 :*</u>

On réalise 600 fois une expérience, dont la probabilité de succès est de 0,6. On suppose que les 600 expériences sont indépendantes. On note X le nombre de succès obtenus.
Minorer $P(320 < X < 400)$

<u>*Exo42 :*</u>

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires
On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise.
On note X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche
Calculer l'espérance et la variance de X

<u>*Exo43 :*</u>

On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile vaut $\frac{3}{4}$.
On note X la longueur de la première chaîne obtenue, à savoir le nombre de tirage initiaux donnant le même résultat que le premier tirage.
On note Y la longueur de la seconde chaîne
Par exemple si les premiers tirages donnent $PPPPFFP$*…. Alors* $X = 4$ *et* $Y = 2$
Déterminer la loi conjointes de (X,Y) *et les lois marginales*
Puis donner la loi de probabilité conditionnelle de X sachant (Y=j)

<u>*Exo44 :*</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $B(m, p)$ *et* $B(n, p)$.
Montrer que la loi $X+Y$ *suit la loi binomiale* $B(m+n, p)$

<u>*Exo45 :*</u>

Une urne contient 2 *boules blanches et* 8 *boules noires*
Un joueur tire successivement, avec remise, cinq dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 *points et pour chaque boule noire tirée il perd* 3 *points. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus après les* 5 *tirages*
Déterminer la loi de X, préciser son espérance et sa variance
Déterminer la loi de Y, préciser son espérance et sa variance

<u>*Exo46 :*</u>

On pose un réel $p \in]0,1[$ *et r un entier naturel non nul*
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant t = 0 , on envoie un rayon laser toute les secondes dans cette enceinte. Le premier rayon est envoyé à l'instant t=1. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie
Déterminer la loi de X
Prouver que X admet une espérance et la calculer

<u>*Exo47 :*</u>

Une entreprise fabriquant des ordinateurs constate que le nombre de défauts présentés par un ordinateur à la sortie de la chaîne de fabrication suit une loi de poisson de paramètre 4.
Quelle est la probabilité pour qu'un ordinateur ait au moins un défaut ?
Calculer la probabilité que le nombre de défauts d'un ordinateurs soit compris entre 4 *et* 8

<u>*Exo48 :*</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déterminer la valeur du réel a pour que leur loi conjointe soit définie par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}}$$

Trouver le loi marginale de X

Exo49 :

La demande quotidienne d'un article suit une loi de Poisson de moyenne 3*. Le fabricant lance une campagne publicitaire. On estime que celle-ci a une probabilité* 0,8 *de doubler la demande moyenne et une probabilité de* 0,2 *de la tripler.*

Quelle est la loi de probabilité de la demande quotidienne de cet article après la campagne publicitaire ? Que vaut son espérance et sa variance ? cette loi suit-elle une loi de Poisson ?

Exo50 :

X désigne le nombre de clients entrant dans un salon de coiffure dans un intervalle de temps. On suppose que X suit une loi de Poisson ?

En moyenne il entre n personnes en une heure

Quelle est l'expression de la loi donnant la probabilité pour k personnes entrent dans un intervalle de temps T ?

Calculer cette probabilité pour qu'il y ait une seule personne au bout du temps $T = \frac{2}{n}$

Calculer cette probabilité pour qu'il y ait au moins 4 *personnes au bout du temps* $T = \frac{1}{n}$

Le salon ne peut accueillir plus de 3 *personnes par heure sans arriver à saturation. Quelle est le pourcentage de personnes qui devront revenir si le nombre moyen de personnes entrant par heure est* 2 *?*

Exo51 :

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre respectif λ *et* μ

Montrer que Z = X+Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre

Exo52 :

On effectue des tirages successifs avec remise, d'une boule dans une urne qui contient deux boules rouges et trois boules noires.

A partir de combien de tirages peut-on garantir à plus de 95% *que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre* 0,35 *et* 0,45 *?*

Exo53 :

Soit une variable aléatoire V à valeurs dans $\mathbb{N}$ *telle que*

$P(V = n) = pq^{2n}(1+q)$ *où* $p \in \left]0,1\right[$ *et* $q = 1-p$

On pose $W = V+1$*.Montrer que la loi de W est géométrique, en déduire l'espérance de V*

Exo54 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies à valeurs dans $\mathbb{N}$

On suppose que la loi du couple (X,Y) *est donnée :*

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, P((X,Y) = (k,n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & si\ k \le n \\ 0 & si\ k > n \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité

Déterminer les lois de Y.

Prouver que 1 + Y suit une loi géométrique et en déduire l'espérance de Y.

Déterminer la loi de X

Exo55 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p

Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$

Exo56 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies à valeurs dans $\mathbb{N}$

On suppose que la loi du couple (X,Y) *est donnée :* $\forall (k,n)\in \mathbb{N}^2, P\left((X,Y)=(i,j)\right)=\dfrac{1}{e2^{i+1}j!}$

Déterminer les lois de X et de Y

Prouver que 1 + X suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

X et Y sont elles indépendantes ?

Calculer $P(X=Y)$

Exo57 :

On dispose de deux urnes U_1 *et* U_2

L'urne 1 *contient deux boules blanches et trois boules noires*

L'urne 2 *contient quatre boules blanches et trois boules noires*

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes

On choisit une urne au hasard, on tire une boule dans l'urne choisie

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne 1*, sinon le tirage suivant se fait dans l'urne* 2

On note B_n *l'événement la boule au nième tirage est blanche et on pose* $p_n = P(B_n)$

Calculer p_1

Exprimer p_{n+1} *en fonction de* p_n

En déduire la valeur de p_n *en fonction de n*

Exo58 :

On dispose de n boules numérotées de 1 *à n et d'une boite formée de 3 compartiments identiques numérotés de* 1 *à* 3*.*

On lance simultanément les n boules

Elles viennent se ranger aléatoirement dans les trois compartiments

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules

On note X la variable aléatoire qui a chaque expérience fait correspondre le nombre de compartiments vides

Préciser les valeurs prises par X

Déterminer $P(X=2)$*, puis terminer le calcul de la loi de X*

Calculer l'espérance de X

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(X)$

Exo59 :

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ*.*

On suppose que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ *et que pour* $m\in\mathbb{N}$*, la loi condition de X sachant* $(Y=m)$ *et une loi binomiale de paramètre* (m,p)

Déterminer la loi de X

Exo60 :

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p$\in \left]0,1\right[$.

Soit X le nombre de correspondants obtenus

Quelle est la loi de X

La secrétaire rappelle une seconde dans les mêmes conditions, chacun des n-X correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours du premier appel. On note Y le nombre de personnes jointes au cours du second appel.

Déterminer pour $i\in [\![0,n]\!],\ k\in\mathbb{N},\ \ P(Y=k/X=i)$

Prouver que $Z = X + Y$ *suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres*

<u>*Exo61 :*</u> *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

Montrer que X admet un espérance si et seulement si la famille $\left(P\left(X > n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable*

Et que $E\left(X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X > n\right)$

<u>*Exo62 :*</u>

Soit $\left(X, Y\right)$ *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}^2$ *dont la loi est donnée par*

$$P\left(\left(X,Y\right) = \left(j,k\right)\right) = \frac{\left(j+k\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\left(j\right)!\left(k\right)!}$$

Déterminer les lois marginales de X et Y. Sont elles indépendantes ?

Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ *existe et la calculer*

<u>*Exo63 :*</u>

Lors d'un concours de saut en hauteur, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. Quand un saut es raté, la compétition s'arrête.

La sauteur a une chance sur n de réussir le n ième saut.

Soit X le rang du dernier saut réussi

Quelle est la loi de X ?

Vérifier que X est bien une variable aléatoire

Déterminer son espérance et sa variance.

<u>*Exo64 :*</u>

Soit $\lambda \in \left]0, +\infty\right[$ *et X une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$.

On suppose que $P\left(X = n\right) = \frac{\lambda}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$

Déterminer λ

Prouver que X admet une espérance et la calculer

X admet elle une variance ?

<u>*Exo65 :*</u>

Soit $\left(X_i\right)_{i=1..n}$ *n variable aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p*

On note le vecteur $U = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ *et* $M = U\,{}^tU$

Déterminer les lois de $Rang\left(M\right)$ *et* $Tr\left(M\right)$

<u>*Exo66 :*</u>

On considère n un entier naturel non nul. Soit S_n *une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et x.*

Montrer que pour tout $\alpha > 0,\ P\left(\left|S_n - nx\right| > n\alpha\right) \le \frac{1}{4n\alpha^2}$

Pour tout $\varepsilon > 0$, *on choisit* α *tel que si* $n > N$ *alors* $\frac{1}{4n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Pour toute fonction f continue sur $\left[0,1\right]$, *on pose* $B_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k \left(1-x\right)^{n-k}$

Montrer que $E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n\left(x\right)$

On pose $J = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ telle\ que\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \alpha\right\}$ *et* $L = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ telle\ que\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$

En utilisant ces deux ensembles montrer que dès que $n > N$, $\forall x \in [0,1]$, $|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

<u>Exo67 :</u>

On dispose d'une pièce qui, à l'issue d'un lancer, amène PILE avec une probabilité $p \in]0,1[$ *et FACE avec une probabilité* $q = 1 - p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir deux PILES.

On note U la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir ces deux PILES et T la variable aléatoire égale au nombre de lancres nécessaires pour obtenir le premier PILE .

Si, par exemple on obtient la suite de lancers : FACE,FACE,PILE,FACE,PILE

Alors $T = 3$ *et* $U = 5$

Donner la loi, l'espérance et la variance de T

Quelles sont les valeurs prises par U. Déterminer la loi de U.

Justifier que U admet une espérance, puis calculer cette espérance

Justifier que U admet un moment d'ordre 2, puis calculer sa variance.

<u>Exo 68 :</u>

(Ω, T, P) *un espace probabilisé. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suive une loi géométrique de paramètre p et Y une loi géométrique de paramètre q*

Calculer $P(X > n)$

On note $Z = \min(X, Y)$ *déterminer la loi de Z et calculer son espérance*

<u>Exo69 :</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que Y suit une loi de Poisson de paramètre 2.

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que pour* $m \in \mathbb{N}$, *la loi condition de X sachant* $(Y = m)$ *et une loi binomiale de paramètre* $\left(m, \frac{1}{3}\right)$*.Déterminer la loi de X*

<u>Exo70 :</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ *et Y une loi géométrique de paramètre* $\frac{2}{3}$*.Déterminer la loi de* $Z = X + Y$

<u>Exo71 :</u>

Soit un espace probabilisé (Ω, T, P), *X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $Y_n = \min(X, n)$. *Déterminer la loi de* Y_n

<u>Exo72 :</u>

Soit une variable aléatoire discrète X dont l'univers image est $\mathbb{N}$, *on suppose que X admet une espérance, montrer que* $\lim_{n \to \infty} nP(X > n) = 0$

<u>Exo73 :</u>

Soient X une variable aléatoire sur (Ω, T, P) *suivant une loi de Poisson de paramètre* λ *et r une entier naturel non nul. Calculer* $E(X(X-1)(X-2)....(X-r+1))$

<u>Exo74 :</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, T, P) *suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer* $P(Y > X)$

<u>Exo75 :</u>

Un insecte pond des œufs. Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. *Chaque œuf à une probabilité p d'éclore, indépendante des autres œufs. Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.*

Déterminer l'espérance de Z

IV) Fonctions génératrices :

Exo76:

On suppose $x \in \mathbb{R}^{*+}$ *et X désigne une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi de probabilité est donnée par :* $P(X=n)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

Calculer sa fonction génératrice à l'aide de fonctions usuelles. En déduire son espérance et sa variance

Exo77:

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent une loi binomiale, $X \sim B(m,p)$ *et* $Y \sim B(n,p)$ *alors* $X+Y \sim B(m+n,p)$

Exo78:

Rappeler la définition d'une fonction génératrice d'une variable aléatoire X, déterminer cette fonction lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre a, préciser l'expression de l'espérance et de la variance en fonction de cette fonction génératrice (on ne demande pas la démonstration) et retrouver ainsi l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre a

Exo79:

(Ω, T, P) *un espace probabilisé*

On considère X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ *et* $P(X=n)=\dfrac{a}{n(2)^n}$

Déterminer a pour X soit bien une variable aléatoire sur Ω

Justifier que X admet un espérance et calculer cette espérance

Justifier que X admet un moment d'ordre 2 et calculer sa variance

Déterminer la fonction génératrice de X

Retrouver les valeurs de $E(X)$ *et* $V(X)$ *à l'aide de la fonction génératrice de X*

Exo80 :

Un sac contient 4 boules : une numérotée 0, deux numérotées 1 et une numérotée 2 .

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n *la somme des numéros tirés.*

Déterminer pour $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ *la fonction génératrice de* S_n *en t*

En déduire la loi de S_n.

Exo81 :

Soit N une variable aléatoire sur (Ω, T, P) *telle que* $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p*

On pose $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$ *et* $Y=\sum_{i=1}^{N}(1-X_i)$

Pour tout $(t,u)\in[-1,1]^2$, $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$

Exprimer G en fonction de la fonction génératrice de N

Exo82:

Soient $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille de variables aléatoires indépendantes de même fonction génératrice* G_Y, *soit X une autre variable aléatoire indépendante des* Y_i *de fonction génératrice* G_X. *On suppose que* $P(X=0)=0$. *On pose* $W=\sum_{i=1}^{X} Y_i$ *, montrer que la fonction génératrice de W est donnée par* $G_W = G_X o G_Y$. *(on pourra introduire* $S_i=\sum_{k=1}^{i} Y_i$ *, pour* $i \geq 1$ *et* $S_0 = 0$ *)*

Soit $Y_i \sim P(\lambda)$ *et* $X \sim G(1-p)$ *on pose alors* $W=\sum_{i=1}^{X} Y_i$

Retrouver la fonction génératrice de W