Problème :

Partie 1 : Généralité sur la fonction dzeta de Riemann

Pour tout $x>1$ *et tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *on définit* $f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$ *et* $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$

1. *Pour tout* $a>1$, *montrer que la série* $\sum\dfrac{\ln n}{n^a}$ *est convergente .*
2. *Montrer que la fonction* ζ *est de classe* C^1 *sur* $]1,+\infty[$, *puis qu'elle est décroissante.*
3. *La série* $\sum f_n$ *converge t'elle uniformément sur* $]1,+\infty[$.
4. *Montrer que* $\sum f_n$ *converge normalement sur* $[2,+\infty[$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)$
5. *Pour tout* $x>1$, *on pose* $I(x)=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}$. *Encadrer* $\zeta(x)$ *pour* $x>1$. *En déduire un équivalent de* $\zeta(x)$ *au voisinage de 1.*
6. *On considère* $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. *Justifier que pour tout* $x>1$, *la famille* $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ *est sommable et que sa somme est* $(\zeta(x))^2$
7. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on note* d_n *le nombre de diviseurs de n. Montrer que* $(\zeta(x))^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{d_n}{n^x}$. *On pourra utiliser* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$ *où* $A_n=\{(a,b)\in A, ab=n\}$

Partie 2 : La fonction dzeta alternée de Riemann

On définit F la fonction dzêta alternée de Riemann par $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

8. *Déterminer l'ensemble de définition de F. On rappelle que* $F(1)=\ln 2$
9. *Pour* $x>0$, *étudier les variations sur* $]0,+\infty[$ *de la fonction* $t\mapsto\dfrac{\ln t}{t^x}$, *en déduire la monotonie de la suite* $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)$ *à partir d'un certain rang que l'on précisera*
10. *Montrer que* F *est une fonction de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
11. *Pour* $x>1$, *calculer* $F(x)-\zeta(x)$, *en déduire que* $F(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x)$
12. *Quelle est la limite de F en* $+\infty$ *?*
13. *On note* $c_n(x)$ *le terme général de la série produit de Cauchy de la série* $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *par elle même. Indiquer et justifier sans calcul la nature de la série* $\sum c_n(x)$ *lorsque* $x>1$.
14. *Montrer que pour* $x>0$, $|c_n(x)|\geq\dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$. *En déduire la nature de* $\sum c_n(x)$ *pour* $0<x\leq\dfrac{1}{2}$

On se place dans cette question dans le cas où $x=1$

15. *Après avoir décomposé en éléments simples la fraction* $\dfrac{1}{X(n-X)}$ *, donner l'expression de* $c_n(1)$ *en fonction de* $\dfrac{H_{n-1}}{n}$ *où* $H_n=\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}$

16. *Etudier la monotonie de la suite* $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)$ *et en déduire la nature de la série* $\sum c_n(1)$

<u>Partie 3 : Etude au voisinage de 1</u>

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ *où* v_n *est définie sur* $[1,2]$ *par* $v_n(x)=\dfrac{1}{n^x}-\displaystyle\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^x}$.

17. *Justifier que la série* $\sum v_n$ *converge simplement sur* $[1,2]$ *et on notera* $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(1)$

18. *Pour* $x\in\left]1,2\right]$ *, exprimer* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ *en fonction de* $\zeta(x)$ *et* $x-1$

19. *Etablir la convergence uniforme de* $\sum v_n$ *sur* $[1,2]$ *et en déduire que l'on a pour x au voisinage de* 1^+ *:* $\zeta(x)=\dfrac{1}{x-1}+\alpha+o(1)$

On donne le résultat suivant : si $x\in V(1)$ *alors* $1-2^{x-1}=(x-1)\ln 2-\dfrac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2+o(x-1)^2$.

20. *En utilisant un développement limité de* $F(x)$ *au voisinage de 1, déterminer une expression de* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ *en fonction de* $\ln 2$ *et* α