David Corneillie : MP 2020-2021

DS n°1 : Mathématiques 4 heures
Samedi 05/09/20

Ce devoir comporte 4 questions de connaissance, 2 exercices et 1 problème indépendants les uns des autres
L'usage de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

Questions de connaissance :

Compléter les phrases suivantes

1. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) \in$

2. *La dérivée de* $x \mapsto \arccos(x)$ *est* $x \mapsto$

3. *Le développement limité à l'ordre 3 de* $\ln(1-x) =$

4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *alors* $rang(A) =$ *et* $\det(A) =$

Exercice n°1 :

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. *Montrer que la suite tend vers* $+\infty$.
2. *Calculer* $w_n = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1},\ \forall n \geq 1$ *, on pourra exprimer* w_{n+1} *en fonction de* w_n.
3. *Soit* $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ *. Etudier la monotonie des suites* (v_{2n}) *et* (v_{2n+1})*. En déduire la convergence de la suite* (v_n) *vers* $L \in \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}\right]$.
4. *Exprimer* v_{n+1} *en fonction de* v_n*. En déduire la valeur exacte de* L *.*

Exercice n°2 :

On considère le système différentiel linéaire d'ordre 2 suivant, noté (E)

$$\begin{cases} \forall x > 0, \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

1. *Décomposer en éléments simples sur* $]0,+\infty[$ *, la fonction rationnelle suivante* $\dfrac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$.
2. *Déterminer* $(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$*, tels que* $\dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}=\dfrac{a'}{x}+\dfrac{b'}{x+1}+\dfrac{c'}{(2x+1)^2}$, $\forall x>0$.
3. *Déterminer* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *tels que* $x\mapsto\alpha x+\beta$ *soit solution de (E).*
4. *On pose* $y(x)=(2x+1)z(x)$*. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'un système (F) que vous préciserez.*
5. *Résoudre sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *l'équation différentielle suivante* $x(x+1)(2x+1)u'(x)+\left(8x^2+8x+1\right)u(x)=0$ *où u est une fonction de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
6. *Déterminer les solutions de (E).*

<u>Problème :</u>

Préliminaire :

On considère F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n.
On suppose que $E=F\oplus G$

1. Donner une caractérisation de l'égalité $E=F\oplus G$.

On considère dans ce problème s une symétrie par rapport à F dans la direction de G
On rappelle alors que $F=\ker(s-Id)$ *et* $G=\ker(s+Id)$.

2. Montrer que $sos=Id$.

Partie 1 :

Dans cette partie on suppose que $n=2$.
On pose la base canonique de E : $e_1=(1,0)$ *et* $e_2=(0,1)$
On considère $F=vect(\varepsilon_1)$ *et* $G=vect(\varepsilon_2)$

3. On pose le vecteur $x=\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2$*. Exprimer* $s(x)$.

On prendra ensuite $\varepsilon_1=(1,1)$ *et* $\varepsilon_2=(-2,1)$.

4. Vérifier que $E=F\oplus G$.

5. Exprimer e_1 *et* e_2 *en fonction de* $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

6. Calculer $s(e_1)$ *et* $s(e_2)$.

7. En déduire la matrice de s dans la base canonique .

Partie 2 :

Une symétrie est orthogonale lorsque F et G sont orthogonaux, à savoir $\forall (x_F, x_G) \in F \times G,\ x_F \perp x_G$

Dans cette partie on suppose que $n = 3$.

On pose la base canonique de E : $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_2 = (0,0,1)$

On considère $F = vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *où* $\varepsilon_1 = (1,2,0)$ *et* $\varepsilon_2 = (-2,1,1)$.

On rappelle que le produit scalaire dans E est donné par $\langle (x,y,z),(x',y',z') \rangle = xx' + yy' + zz'$

8. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *pour que* $\varepsilon_3 = (2,a,b)$ *soit orthogonal à* ε_1 *et* ε_2.

9. On pose $G = vect(\varepsilon_3)$. *Montrer que* $E = F \oplus G$.

10. Exprimer e_1, e_2 *et* e_3 *en fonction de* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

11. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.