David Corneillie : MP 2021-2022

DS n°1 : Mathématiques 4 heures
Samedi 11/09/21

Ce devoir comporte un test simple et 4 exercices indépendants les uns des autres
L'usage de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

Test simple :

J'achète un produit ayant une réduction de 25% qui correspond à 3€. Combien vais je payer ?

Exercice n°1 (autour de l'étude de suites)

Partie A : (d'après CEAS)

Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \lfloor 2x \rfloor \geq 2\lfloor x \rfloor$*
2. *Soit $\lambda \in [0,1[$. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \dfrac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$. Montrer que la suite (d_n) est convergente.*

Partie B : (d'après CCINP)

On note $f_0(x) = x,\ \forall x \in [0,1]$.

Pour tout entier n et tout réel $x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} \text{ si } x \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in \left]\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \text{ si } x \in \left]\dfrac{2}{3},1\right] \end{cases}$

1. *Représenter les fonctions f_1 et f_2 sur 2 schémas différents*
2. *Pour tout entier n, montrer que $\forall x \in [0,1], \left| f_{n+1}(x) - f_n(x) \right| \leq \dfrac{1}{3(2)^{n+1}}$.*
3. *En déduire que $\forall x \in [0,1]$ la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

(cette limite s'appelle la fonction de Cantor-Lebesgue aussi nommée l' escalier du diable)

Exercice n°2 : Polynôme et trigonométrie *(D'après Centrale)*

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $T_0 = 1,\ T_1 = X$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

1. *Déterminer le degré et le coefficient dominant de* T_n
2. *Montrer que* $(T_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq n\sin(\theta)$
5. *Montrer que* $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ T_n'(x) = \dfrac{n\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$
6. *En déduire que* $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ |T_n'(x)| \leq n^2$

Exercice n°3 : Dénombrement et probabilité *(D'après Oral INP)*

Soit un entier naturel n non nul
Une urne contient 2n boules, dont n rouges et n blanches.
On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne.
On appelle X le nombre de boules rouges obtenues

1. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{n-1-k} = \binom{2n-1}{n-1}$
2. *Déterminer la loi de X, à savoir* $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X = k)$.
3. *Montrer que* $\forall k \in [\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
4. *Calculer l'espérance de X.*

Exercice n°4 : Structure algébrique

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, *on pose* $\mathbb{Z}(\alpha) = \{a + b\alpha \text{ où } (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1. *On suppose que* $(\mathbb{Z}(\alpha),+,\times)$ *est un anneau . Montrer que* α *est racine d'un polynôme à coefficients entiers, de degré 2 dont le coefficient dominant vaut 1.*
2. *On suppose l'existence de* $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$. *Montrer que* $(\mathbb{Z}(\alpha),+,\times)$ *est un anneau.*
3. *Soit n un entier qui ne soit pas le carré d'un entier. Montrer que* $(\mathbb{Z}(\sqrt{n}),+,\times)$ *est un anneau.*
4. *Pour tout* $x = a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Z}(\sqrt{n})$, *on pose* $\overline{x} = a - b\sqrt{n}$ *et* $N(x) = x\overline{x}$.

   Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{Z}(\sqrt{n}))^2$ *on a* $N(xy) = N(x)N(y)$
5. *Montrer que x est inversible dans* $\mathbb{Z}(\sqrt{n})$ *si et seulement si* $|N(x)| = 1$
6. *Montrer que* $8 + 3\sqrt{7}$ *est inversible dans* $\mathbb{Z}(\sqrt{7})$ *et donner son inverse.*