Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1
 On pose A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, $A \in M_n(\mathbb{C})$.
 Soit X un vecteur colonne à coefficients complexes, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

On dit qu'un complexe μ est une valeur co-propre de A , s'il existe $X \neq 0$ tel que $A\bar{X} = \mu X$ où $\bar{X}$ est le vecteur dont les coordonnées sont les conjugués des coordonnées de X .
 X sera appelé vecteur co-propre de A associé à μ

I : Partie 1

1. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de A , alors pour tout réel θ , le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de A .

2. En déduire que si μ est une valeur co-propre de A , alors $|\mu|$ le sera aussi.

3. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ , cette matrice a au moins une valeur co-propre.

4. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rechercher les valeurs co-propres de A .

5. Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A , le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\bar{A}$

6. Soit λ une valeur propre positive ou nulle de la matrice $A\bar{A}$ et X un vecteur propre associé
 Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants

- i. les vecteurs $A\bar{X}$ et X sont liés ;
- ii. les vecteurs $A\bar{X}$ et X sont indépendants ;

7. En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A , il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\bar{A}$

8. Dans cette question la matrice A est une matrice triangulaire supérieure.

a. Démontrer que, si λ est une valeur propre de la matrice A , pour tout réel θ , le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A .

b. Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A , il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A .

c. Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur co-propre associé.

Poser : $X = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$

9. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante : $A = B + iC$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D , carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation

$$\text{suivante : } D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$$

II : Partie 2 :

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n , s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible telle que la relation $B = SAS^{-1}$ soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables.

Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable.

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n , ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } B = SAS^{-1}$$

10. Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .

11. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n , soient $X_1, X_2, \dots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$; l'entier k étant inférieur ou égal à l'entier n

Démontrer que, si les valeurs co-propres $(\mu_p)_{1 \leq p \leq k}$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Rightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$) alors la famille $(X_p)_{1 \leq p \leq k}$ est libre.

12. En déduire que, si la matrice $\overline{AA}$ possède n valeurs propres, positives ou nulles, distinctes les unes des autres, la matrice A est co-diagonalisable.

13. a. Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible, soit A la matrice définie par la relation $A = SS^{-1}$. Calculer la matrice produit $\overline{AA}$.

b. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $\overline{AA} = I_n$

Démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation $S(\theta) = e^{i\theta} A + e^{-i\theta} I_n$, soit inversible.

c. Calculer, en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $\overline{AS(\theta)}$

d. En déduire la matrice $S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$

14. Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit diagonale.

Démontrer que la matrice $\overline{AA}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $\overline{AA}$.

15. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- i. la matrice $A\bar{A}$ est diagonalisable,
- ii. les valeurs propres de la matrice $A\bar{A}$ sont positives ou nulles,
- iii. le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A\bar{A}$.

Soient $(\lambda_p)_{1 \leq p \leq k}$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A\bar{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon qu'elles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq 0$$

Les valeurs propres $(\lambda_p)_{1 \leq p \leq k}$ ont respectivement les multiplicités $(n_p)_{1 \leq p \leq k}$.

Soit I_p la matrice identité d'ordre p .

Une matrice diagonale Λ , semblable à la matrice $A\bar{A}$ s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse il existe une matrice S inversible telle que $A\bar{A} = S\Lambda S^{-1}$

Soit B la matrice définie par la relation suivante : $B = S^{-1}A\bar{S}$

a. Démontrer les relations : $B\bar{B} = \bar{B}B$ et $B\Lambda = \Lambda B$

b. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix}$$

c. Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = P\Delta\bar{P}^{-1}$$

d. En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses i, ii et iii est co-diagonalisable.

16. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

17. Soient A, B, C et D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?