

1° Notons $H = \{(mx, my), m \in \mathbb{Z}\}$

$H \subset \mathbb{Z}^2$, $(0,0) \in H$ donc $H \neq \emptyset$.

$(mx, my) - (px, py) = (m-p)x, (m-p)y \in H$.

donc $(H, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$

$(x, y) \in H$

Soit K un sous groupe de $\mathbb{Z}^2$ contenant (x, y)

alors $\forall m \in \mathbb{Z}$, $(mx, my) \in K$ donc $H \subset K$

H est donc le + petit sous groupe de $\mathbb{Z}^2$ contenant X

$$\underline{\subseteq} \quad \boxed{G_{\mathbb{Z}}(X) = \{(mx, my), m \in \mathbb{Z}\}}$$

2° si $x \neq 0$ alors $B \notin G_{\mathbb{Z}}(X)$ car $m=0$ et $my=1$ est impossible.

si $x=0$ alors $A \notin G_{\mathbb{Z}}(X)$

Finalement $G_{\mathbb{Z}}(X) \neq \mathbb{Z}^2$.

$\boxed{\mathbb{Z}^2 \text{ ne sera pas monogène}}$

3° Soit $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ un morphisme de groupes.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ alors $f(m) = mf(1)$

donc $\text{Im } f = G_{\mathbb{Z}}(f(1)) \neq \mathbb{Z}^2$.

donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjectif}}$

4° Soit $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$

posons $a = g(A)$ et $b = g(B)$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

et $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, g(x, y) = ax + by}$

5°/ $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes.

1° cas si $a=b=0$ alors $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, g(x,y)=0$
donc g n'est pas injectif.

2° cas si $(a,b) \neq (0,0)$

$$g(-b, a) = 0 \quad \text{or} \quad (-b, a) \neq (0, 0)$$

Donc g n'est pas injectif

$$6°/ \text{Im } g = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$

7°/ On suppose que $\mathbb{Z}^2 = \text{Gr}(U, V)$

donc $(A, B) \in \text{Gr}(U, V)$

donc $\exists (x_1, y_1) \text{ tq } A = x_1 U + y_1 V$

$\exists (x_2, y_2) \text{ tq } B = x_2 U + y_2 V$

$$\underline{\text{soit}} \begin{cases} x_1 a + y_1 c = 1 & (*) \\ x_1 b + y_1 d = 0 \\ x_2 a + y_2 c = 0 \\ x_2 b + y_2 d = 1 & (**) \end{cases}$$

D'après l'Algorithme de Bezout $(*)$ et $(**)$ admettent pour

$$a \wedge c = 1 \quad \text{et} \quad b \wedge d = 1$$

Par ailleurs $x_1 b = -y_1 d$ donc $d \mid x_1 b$ or $d \wedge b = 1$
donc $d \mid x_1$ soit $x_1 = kd$.

or $y_1 d = x_1 b$ donc $y_1 = -kb$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$x_1 a + y_1 c = k(da - bc) = 1$$

Donc $ad - bc \mid 1$ soit $|ad - bc| = \pm 1$

3°/ Réciproquement

$ad - bc \neq 0$ les systèmes $\begin{cases} ax_1 + cy_1 = 1 \\ bx_1 + dy_1 = 0 \end{cases}$

et $\begin{cases} ax_2 + cy_2 = 0 \\ bx_2 + dy_2 = 1 \end{cases}$

admettent des solutions uniques.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{d}{ad-bc} \\ y_1 = \frac{-b}{ad-bc} \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x_2 = \frac{-c}{ad-bc} \\ y_2 = \frac{a}{ad-bc} \end{cases}$

or $[ad-bc] = \pm 1$ donc $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^4$

or $\begin{cases} x_1 U + y_1 V = A \\ x_2 U + y_2 V = B \end{cases}$ donc $(A, B) \in \text{Gr}(U, V)$

on a $\text{Gr}(A, B) = \mathbb{Z}^2 \subset \text{Gr}(U, V)$

Donc $\boxed{(U, V) \text{ engendrent } \mathbb{Z}^2}$

3°/ Montrons que $(K, +)$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.

Soit $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ f est un morphisme de groupe
 $(x, y) \mapsto x$

donc $f(H)$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$

or les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ est des $a\mathbb{Z}$.

$\exists a \in \mathbb{Z}$ t.p. $f(H) = K = a\mathbb{Z}$

10. / Notons $G = \{(0, g) \mid g \in \mathbb{Z}\}$ c'est un sous groupe de $\mathbb{Z}^2$ or $L = G \cap H$ donc L est un sous groupe de $\mathbb{Z}^2$

Soit $L' = \{g \in \mathbb{Z} \mid (0, g) \in L\}$, L' est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ donc $\exists c \in \mathbb{Z} \mid L' = c\mathbb{Z}$

$$\text{or } \boxed{L = \{(0, mc) \mid m \in \mathbb{Z}\} = \text{Gr}(V) \text{ où } V \in (0, c)}$$

11. / $\forall (x, y) \in H$ alors $x \in K = 0\mathbb{Z}$, $x = ak$

$$\text{donc } (x, y) = k(a, b) + (0, y - kb)$$

$$\text{or } (0, y - kb) \in L \text{ donc } (0, y - kb) = b'(0, c)$$

$$\underline{\text{Finalement}} \quad (x, y) = kU + b'V$$

$$\text{et donc } \text{Gr}(U, V) \supset H$$

$$\text{or } \text{Gr}(U, V) \subset H \text{ donc } \boxed{H = \text{Gr}(U, V)}$$

12° / Si $a = 0$ alors $H = \text{Gr}(V)$ car $U \in L$

Si $c = 0$ alors $V = (0, 0)$ donc $H = \text{Gr}(U)$

Donc si $a = 0$ alors H est homogène

Si $ac \neq 0$, supposons que $H = \text{Gr}(X) = \text{Gr}((x, y))$

$$\text{donc } \exists (m, p) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } \begin{cases} mX = U \\ pX = V \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} mx = a \\ my = b \\ px = 0 \\ py = c \end{cases}$$

$$\text{or } c \neq 0 \text{ donc } p \neq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{donc } a = 0$$

impossible