

Question 1 :

$\chi_A(x) = x(x-1)(x-4)$, donc A admet 3 valeurs propres $\{0,1,4\}$ distinctes en dimension 3, f est finalement bien diagonalisable. Chaque espace propre est de dimension 1 et on a :

$$E_0 = \text{Vect}((1, -2, 0)), E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1)) \text{ et } E_4 = \text{Vect}((1, -1, 0))$$

$$\text{On pose donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 2 :

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ d'où } A^m = PD^m P^{-1} \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } A^m = \begin{pmatrix} 2(4)^m & 4^m & -2(4)^m + 1 \\ -2(4)^m & -4^m & 2(4)^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 3 :

$$\text{On note } M = (m_{ij}), \text{ on a } MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & 4m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & 4m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & 4m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 4m_{3,1} & 4m_{3,2} & 4m_{3,3} \end{pmatrix}$$

Donc $m_{i,j} = 0$ si $i \neq j$

Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales

Question 4 :

Si $H^2 = D$ alors $HD = H^3$ et $DH = H^3$ donc $DH = HD$

Question 5 :

Si $H^2 = D$ alors d'après la question 3, H est nécessairement diagonale.

Réciproquement, soit H une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont a, b et c . Son carré sera aussi diagonale est les termes diagonaux seront a^2, b^2 et c^2

Donc si $H^2 = D$ alors $a = 0, b = \pm 1$ et $c = \pm 2$

$$H^2 = D \Leftrightarrow H = H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$h \in R(f) \Leftrightarrow HA = AH \Leftrightarrow HPDP^{-1} = PDP^{-1}H \Leftrightarrow P^{-1}HPD = DP^{-1}HP$$

il faut et il suffit que $P^{-1}HP$ soit l'une des 4 matrices obtenues soit $H = PH_i P^{-1}$

$$PH_1 P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, PH_2 P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PH_3 P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, PH_4 P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 6 :

$J^3 = 3J$, donc pour entier m non nul $J^m = 3^{m-1}J$

On pose alors $A = I_3 + J$, comme l'identité commute avec J , d'après le binôme de Newton

$$A^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 3^k \right) J = I_3 + \frac{1}{3} ((3+1)^m - 1) J$$

On a donc bien $A^m = I_3 + \frac{1}{3} (4^m - 1) J$

Dans le cas où m est nul : $I_3 + \frac{1}{3} (4^0 - 1) J = I_3 = A^0$, la formule reste donc valable

Question 7 :

$\chi_A(x) = (x-1)^2(x-4)$ donc le spectre est réduit à $\{1, 4\}$

Question 8 :

D'après la question 6 on a $f^m = Id + \frac{1}{3} (4^m - 1) J = 1^m \left(Id - \frac{1}{3} J \right) + 4^m \left(\frac{1}{3} J \right)$

Si on pose $p = Id - \frac{1}{3} J$ et $q = \frac{1}{3} J$ on a bien $f^m = 1^m p + 4^m q$, ce qui prouve l'existence

Réciproquement si on a $f^m = 1^m p + 4^m q$, nécessairement on aura

$p + q = Id$ et $p + 4q = f = Id + J$, en résolvant ce système on trouve bien

$$q = \frac{1}{3} J \text{ et } p = Id - \frac{1}{3} J$$

Question 9 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ap + bq = 0 \Rightarrow aId + \left(\frac{-a}{3} + \frac{b}{3} \right) J = 0$ or Id et J sont linéairement indépendants donc $a = b = 0$, ce qui prouve bien que la famille (p, q) est libre

Question 10 :

$$q^2 = \frac{1}{9} J^3 = \frac{3}{9} J = q$$

$$p^2 = \left(Id - \frac{1}{3} J \right)^2 = Id - \frac{2}{3} J + \frac{1}{9} J^2 = Id - \frac{1}{3} J = p$$

$$pq = \left(Id - \frac{1}{3} J \right) o \left(\frac{1}{3} J \right) = \frac{1}{3} J - \frac{1}{9} J^2 = 0$$

de même $qp = 0$

Soit $h = \alpha p + \beta q \in R(f)$ alors $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = p + 4q$ or (p, q) est libre donc $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$. On en déduit que $\text{Vect}(p, q) \cap R(f) = \{p + 2q, p - 2q, -p + 2q, -p - 2q\}$

Question 11 :

Nous savons déjà que le polynôme caractéristique de f est scindé et admet deux valeurs propres : 1 est double et 4 est simple

$\dim E_4 = 1$ et $E_4 = \text{Vect}((1, 1, 1))$

$\text{rang}(A - I_3) = 1$ donc $\dim E_1 = 2$ et $E_1 = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$

La somme des dimensions des espaces propres est égale à la dimension de l'espace donc f est diagonalisable.

On obtient la matrice de changement de base $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice de f dans cette nouvelle base est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dans cette base on a aussi les matrices de p et q : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 12 :

La matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $K^2 = I_2$ de même la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $H^2 = D$

Question 13 :

La matrice dans la base de vecteurs propres de f de $\alpha p + \beta q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, donc toute matrice

combinaison des matrices de p et de q sera donc diagonale, donc si on considère l'endomorphisme h associé à la matrice H de la question 12, il n'est pas combinaison de p et q et appartient à $R(f)$

Question 14 :

L'endomorphisme f est diagonalisable, donc $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_4$

Si h appartient à $R(f)$, alors h et f commutent donc E_1 et E_4 sont stables par h , donc les restrictions respectives de h à E_1 et E_4 sont des endomorphismes respectivement de E_1 et de E_4 .

Si $\varepsilon_3 = (1, 1, 1) \in E_4 \Rightarrow h(\varepsilon_3) \in E_4 = \text{Vect}(\varepsilon_3)$ donc ε_3 est vecteur propre de h

De plus $(h|_{E_1})^2 = f^2|_{E_1} = \text{Id}_{E_1}$, donc $h|_{E_1}$ est une symétrie de polynôme annulateur $X^2 - 1$ qui est simplement scindé donc $h|_{E_1}$ est diagonalisable, il existe $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ une base de E_1 telle que la matrice de

$h|_{E_1}$ dans cette base soit diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Finalement dans cette base la matrice de h sera diagonale

Finalement tout endomorphisme de $R(f)$ est diagonalisable